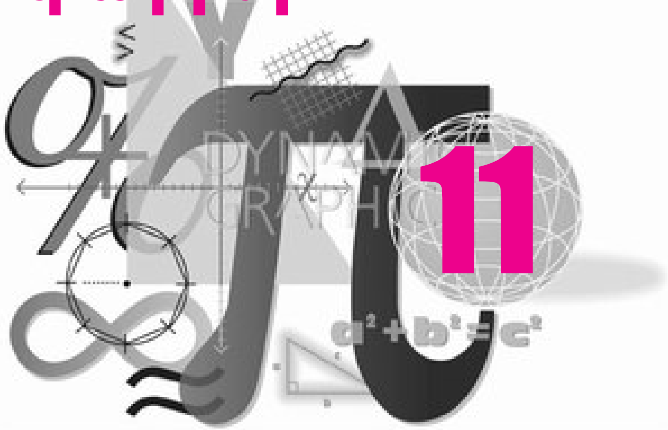
Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ
Ա. Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ
և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր



(բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար)

Երևան
Տիգրան Մեծ
2010

Հաստատված է ՀՀ Կրթության և գիտության նախարարության կողմից
Approved by the Ministry of Education and Science of RA

ՀՏԴ 373.167.1:512(075)
ԳՄԴ 22.14 g72
Գ 477

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա.
Գ 477 Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 11-րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար).- Եր.: Տիգրան Մեծ, 2010.- 208 էջ:

Մասնագիտական խմբագիր` Է. Այվազյան
Խմբագիր` Ա. Ոսկանյան
Համակարգչային աշխատանքները` Ն. Գևորգյանի
Կազմի ձևավորումը` Ա. Օհանջանյանի

ԳՄԴ 22.14g72

ISBN 978-99941-0-314-0

1ին ԳԼՈՒԽ
Աստիճանային և ցուցչային ֆունկցիաներ

Աստիճանային ֆունկցիա

Աստիճանային ֆունկցիա կոչվում է

$$f(x)=x^a$$

բանաձևով տրված ֆունկցիան, որտեղ a -ն զրոյից տարբեր որևէ թիվ է:

Մենք կուսումնասիրենք աստիճանային ֆունկցիաները միայն այն դեպքում, երբ $a=n$ կամ $a=1/n$, որտեղ n-ը բնական թիվ է: Դուք արդեն ծանոթ եք այնպիսի աստիճանային ֆունկցիաների հատկություններին, ինչպիսիք են՝

ա) $f(x)=x$ գծային ֆունկցիան ($a=1$),

բ) $f(x)=x^2$ քառակուսային ֆունկցիան ($a=2$):

Հիշենք նաև, որ աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկը ա) դեպքում կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղիղ է, իսկ բ) դեպքում՝ $(0,0)$ գագաթով պարաբոլ:

§1. Բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիա

Ինչպես կտեսնենք ստորև, բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիան իր շատ հատկություններով նման է գծային ֆունկցիային, երբ n-ը կենտ է, և քառակուսային ֆունկցիային՝ երբ n-ը զույգ է:

Նախ ուսումնասիրենք $f(x)=x^n$ աստիճանային ֆունկցիայի հատկությունները այն դեպքում, երբ n-ը կենտ է:

1) *Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է՝* $D(f)=(-\infty,\infty)$, քանի որ x^n մեծությունը բնական n-ի դեպքում որոշված է կամայական x թվի համար:

2) *Ֆունկցիան կենտ է*, քանի որ կենտ n-ի դեպքում $f(-x)=(-x)^n=-x^n=-f(x)$: Հետևաբար՝ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

3) *Ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝* $f(0)=0$:

4) *Ֆունկցիան դրական է, երբ* $x\in(0,\infty)$ ***և բացասական՝ երբ*** $x\in(-\infty,0)$: Ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է առաջին և երրորդ քառորդներում:

5) *Ֆունկցիան աճում է ամբողջ թվային առանցքի վրա*:

Ենթադրելով, որ $x_1 < x_2$, համոզվենք, որ տեղի ունի $f(x_1) < f(x_2)$ անհավասարությունը: Դիտարկենք երեք դեպք:

ա) Եթե $0 \le x_1 < x_2$, ապա բնական ցուցիչով աստիճանի հատկությունից,

$$f(x_1) < f(x_2):$$

բ) Եթե $x_1 < 0 \le x_2$, ապա 4) հատկության համաձայն՝

$$f(x_1) < 0 \le f(x_2):$$

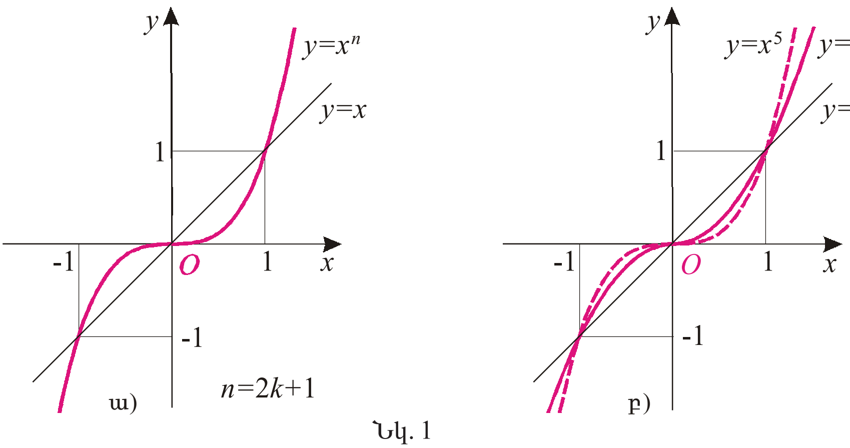
գ) Եթե $x_1 < x_2 \le 0$, ապա $-x_1 > -x_2 \ge 0$, ուստի $f(-x_1) > f(-x_2)$, որտեղից, օգտագործելով ֆունկցիայի կենտ լինելը, կստանանք՝

$$-f(x_1) > -f(x_2), \text{ և } f(x_1) < f(x_2):$$

6) *Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն ամբողջ թվային առանցքն է*՝ $\boldsymbol{E(f) = (-\infty, \infty)}$, քանի որ ֆունկցիան ընդունում է կամայական իրական արժեք ($y \in \mathbf{R}$ արժեքը ֆունկցիան ընդունում է $x = \sqrt[n]{y}$ կետում):

Հետևաբար՝ ***ֆունկցիան անսահմանափակ է և չունի մեծագույն ու փոքրագույն արժեքներ***:

Ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;-1)$ կետերով և այդ կետերում հատում է $y = x$ ուղիղը: Երբ $n = 1$, այն համընկնում է այդ ուղղի հետ: Երբ $n > 1$, ֆունկցիայի գրաֆիկը $0 < x < 1$ տեղամասում գտնվում է $y = x$ ուղղի և աբսցիսների առանցքի միջև (քանի որ այդ դեպքում $0 < f(x) = x^n < x$), իսկ $x = 1$ կետից աջ՝ այդ



Նկ. 1

ուղղից վերև (այդ դեպքում $f(x) = x^n > x$):

Քանի որ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, ապա $-1 < x < 0$ տեղամասում այն կգտնվի $y = x$ ուղղի և աբսցիսների առանցքի միջև, իսկ $x = -1$ կետից ձախ՝ այդ ուղղից ներքև:

Արգումենտի անվերջ մեծանալու հետ ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են, իսկ արգումենտի՝ դեպի $-\infty$ գնալիս ֆունկցիայի արժեքները նվազելով՝ ձգտում են $-\infty$-ի:

Նկ. 1, ա-ում պատկերված է կենտ ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկի սխեմատիկ տեսքը:

Փորձենք պարզել տարբեր կենտ ցուցիչներով աստիճանային ֆունկցիաների գրաֆիկների փոխադարձ դասավորությունը: Մենք գիտենք, որ երբ $n > m$, ապա

$$x^n < x^m \text{, եթե } 0 < x < 1, \text{ և } x^n > x^m \text{, եթե } x > 1:$$

Դա նշանակում է, որ n աստիճանացույցը մեծացնելիս $f(x) = x^n$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, «հեռանալով» $y = x$ ուղղից, $-1 < x < 1$ տեղամասում «սեղմվում է» դեպի աբսցիսների առանցքը, իսկ $x = 1$ կետից աջ և $x = -1$ կետից ձախ՝ դեպի $x = 1$ և $x = -1$ ուղիղները (տե՛ս նկ. 1, բ):

Այժմ քննարկենք

$$f(x) = x^n$$

աստիճանային ֆունկցիայի հատկությունները այն դեպքում, երբ n-ը զույգ է:

1) ***Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է՝*** $\boldsymbol{D(f) = (-\infty;\infty)}$:

2) ***Ֆունկցիան զույգ է:*** Իրոք, զույգ n-ի դեպքում կամայական x-ի համար $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$: Ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է օրդինատների առանցքի նկատմամբ:

3) ***Ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝*** $\boldsymbol{f(0) = 0}$:

4) ***Ֆունկցիան դրական է, երբ*** $x \neq 0$ (քանի որ n-ը զույգ է): Ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է առաջին և երկրորդ քառորդներում:

5) ***Ֆունկցիան նվազում է*** $\boldsymbol{(-\infty;0]}$ ***միջակայքում և աճում*** $\boldsymbol{[0;\infty)}$***-ում:***

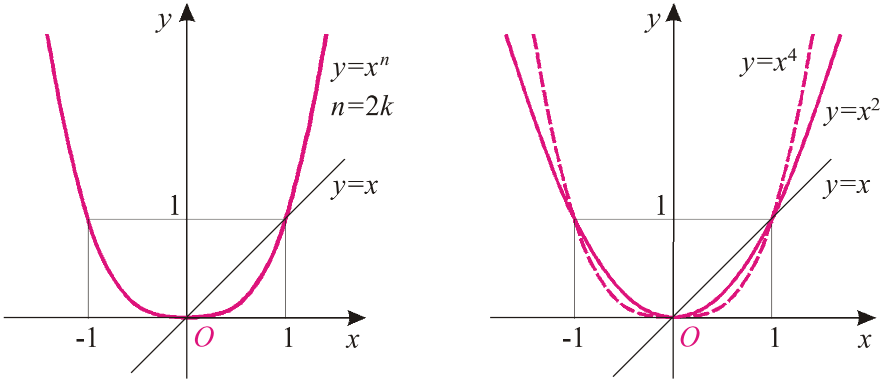
6) ***Ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը*** $\boldsymbol{0}$***-ն է, որը ֆունկցիան ընդունում է*** $\boldsymbol{x = 0}$ ***կետում: Ֆունկցիան մեծագույն արժեք չունի:***

7) ***Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը ոչ բացասական թվերի բազմությունն է՝*** $E(f) = [0,\infty)$, քանի որ այն ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ, մյուս կողմից, կամայական y ոչ բացասական թվի համար ֆունկցիայի արժեքը $x = \sqrt[n]{y}$ կետում հավասար է y-ի:

Ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;1)$ կետերով և այդ կետերում հատում է $y = x^2$ պարաբոլը: Երբ $n = 2$, այն համընկնում է այդ պարաբոլի հետ: Երբ $n > 2$, ֆունկցիայի գրաֆիկը $-1 < x < 1$ տեղամասում գտնվում է պարաբոլի և աբսցիսների առանցքի միջև, իսկ $x = 1$ կետից աջ և $x = -1$ կետից ձախ՝ պարաբոլից վերև:

Կոորդինատների սկզբնակետից արգումենտի անվերջ հեռանալու հետ ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են: Նկ. 2, ա-ում պատկերված է զույգ ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկի սխեմատիկ տեսքը:

Համեմատելով տարբեր զույգ ցուցիչներով աստիճանային ֆունկցիաների գրաֆիկ-



ա) Նկ. 2 բ)

ները, տեսնում ենք, որ n աստիճանացույցը մեծացնելիս $f(x)=x^n$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, «հեռանալով» $y=x^2$ պարաբոլից, $-1<x<1$ տեղամասում «սեղմվում է» դեպի աբսցիսների առանցքը, իսկ $x=1$ կետից աջ և $x=-1$ կետից ձախ՝ դեպի օրդինատների առանցքը (նկ. 2, բ):

Հակացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում աստիճանային ֆունկցիա:
2. Ո՞րն է բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
3. Ե՞րբ է բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիան զույգ և ե՞րբ է կենտ:
4. Որո՞նք են բնական ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը:
5. Ինչպե՞ս են կախված աստիճանային ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը ցուցիչի զույգ կամ կենտ լինելուց:
6. Ո՞րն է աստիճանային ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը, եթե ցուցիչը՝
   ա) զույգ է, բ) կենտ է:
7. Ո՞ր քառորդներում է գտնվում աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե ցուցիչը՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է,
8. Ո՞ր կետերում է հատվում կենտ ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկը $y=x$ ուղղի հետ և ինչպե՞ս է այն փոխվում ցուցիչը մեծացնելիս:
9. Ո՞ր կետերում է հատվում զույգ ցուցիչով աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկը $y=x^2$ պարաբոլի հետ և ինչպե՞ս է այն փոխվում ցուցիչը մեծացնելիս:
10. Ո՞ր կետերում են հատվում տարբեր ցուցիչներով աստիճանային ֆունկցիաների գրաֆիկները:
11. Կառուցել աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե ցուցիչը՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է:

Առաջադրանքներ

1. Դիցուք $f(x)=x^{26}$: Բաղդատել թվերը.

ա) $f(7)$ և $f(8)$,
բ) $f(0{,}3)$ և $f(0{,}4)$,
գ) $f(-24)$ և $f(-23)$,
դ) $f(-5{,}5)$ և $f(-5{,}4)$,
ե) $f(-52)$ և $f(52)$,
զ) $f(-7{,}3)$ և $f(8)$:

2. Դիցուք $f(x)=x^{31}$: Բաղդատել թվերը.

ա) $f(13)$ և $f(12)$,
բ) $f(0{,}02)$ և $f(0{,}01)$,
գ) $f(-4)$ և $f(-10)$,
դ) $f(-9{,}4)$ և $f(-9{,}5)$,
ե) $f(-73)$ և $f(73)$,
զ) $f(-5{,}9)$ և $f(6)$:

3. Հետևյալ թվերը դասավորել աճման կարգով.

ա) $(3{,}4)^2$, $(3{,}4)^5$, $(3{,}4)^3$,
բ) $(0{,}7)^4$, $(0{,}7)^9$, $0{,}7$,
գ) $\left(\frac{2}{5}\right)^4$, $\left(\frac{2}{5}\right)^7$, $\left(\frac{2}{5}\right)^5$,
դ) $\left(\frac{9}{8}\right)^4$, $\left(\frac{9}{8}\right)^7$, $\frac{9}{8}$:

4. Դիցուք տրված են q հայտարարով (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիան, $f(x)=x^k$ աստիճանային ֆունկցիան, և $a_n=f(b_n)$, $n=1,2,\ldots$:

ա) Գտեք $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_6}{a_5}$, $\frac{a_{12}}{a_{11}}$ հարաբերությունները:
բ) Գտեք $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ հարաբերությունը, որտեղ $n=1,2,\ldots$:
գ) Ապացուցեք, որ (a_n) հաջորդականությունը նույնպես երկրաչափական պրոգրեսիա է և գտնել դրա հայտարարը:

5. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը և նշել մոնոտոնության ու նշանապահպանման միջակայքերը.

ա) $f(x)=x^4$,
բ) $f(x)=x^3$,
գ) $f(x)=(x-1)^4$,
դ) $f(x)=(x+1)^3$,
ե) $f(x)=(x-1)^4+2$,
զ) $f(x)=(x+1)^3-8$:

➢ **6.** Գրաֆիկորեն պարզել, թե քանի լուծում ունի հավասարումը.

ա) $x^8=7$,
բ) $x^6=-5{,}2$,
գ) $x^7=-3{,}4$,
դ) $x^9=2.7$,
ե) $x^5=x+1$,
զ) $x^8=x+2$:

7. Օգտվելով աստիճանային ֆունկցիայի հատկություններից, գտնել անհավասարությանը բավարարող x-երի բազմությունը.

ա) $x^{11}>0$,
բ) $x^9\le 0$,
գ) $x^{10}>0$,
դ) $x^6\le 0$,
ե) $x^{12}\ge 0$,
զ) $x^{10}>-53$,
է) $x^8\le -30$,
ը) $x^5>-32$,
թ) $x^3\le -125$:

8. Լուծել հավասարումը, օգտվելով աստիճանային ֆունկցիայի հատկություններից.

ա) $x^{12}=1$, բ) $x^5=3^5$, գ) $x^6=7^6$,

դ) $x^5=-x^7$, ե) $x^{15}=x^9$, զ) $x^8=x^2$:

Լուծել անհավասարումը, օգտվելով աստիճանային ֆունկցիայի հատկություններից (9-10).

9. ա) $x^2<4$, բ) $x^2>0{,}25$, գ) $x^3>\frac{1}{8}$,

դ) $x^9\le 1$, ե) $x^4\le\frac{81}{256}$, զ) $x^4>\frac{625}{16}$:

10. ա) $x^{13}<7^{13}$, բ) $x^{10}\le 9^{10}$, գ) $x^{24}>7^{24}$,

դ) $(x-3)^3<64$, ե) $(x-2)^8\le 1$, զ) $(x+1)^4<81$:

11. Ցույց տալ, որ հավասարումների լուծումները տրված թվերն են.

ա) $x^{10}+x^4=2$, $x=\pm 1$, բ) $x^{13}+x^7=2$, $x=1$,

գ) $x^6+3x^2=76$, $x=\pm 2$, դ) $2x^5+3x^3=88$, $x=2$,

ե) $2x^{18}+3x^{10}=5$, $x=\pm 1$, զ) $4x^{21}+5x^{11}=-9$, $x=-1$:

12. Սխեմատիկորեն պատկերեք f և g աստիճանային ֆունկցիաների գրաֆիկների փոխադարձ դասավորությունը.

ա) $f(x)=x^{11}$, $g(x)=x$, բ) $f(x)=x^6$, $g(x)=x$,

գ) $f(x)=x^{10}$, $g(x)=x^{14}$, դ) $f(x)=x^{13}$, $g(x)=x^9$:

Կրկնության համար

13. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$, բ) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$, գ) $\dfrac{x-8}{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4}$, դ) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1$:

§2. $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիան և նրա հատկությունները

Արդեն ծանոթ ենք կոտորակային ցուցիչով աստիճանին և գիտենք, որ x թվի $\frac{m}{n}$ աստիճանը, որտեղ m-ը և n-ը բնական թվեր են, սահմանվում է ոչ բացասական x թվի համար՝ որպես n աստիճանի արմատ x^m թվից՝

$$x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}: \qquad (1)$$

Նկատենք, որ կենտ n-ի կամ զույգ m-ի դեպքում $\sqrt[n]{x^m}$-ը որոշված է բոլոր x-երի համար: Սակայն նույնիսկ այս դեպքերում բացասական x թվի համար $x^{\frac{m}{n}}$

կոտորակային աստիճանը չի սահմանվում:

Այսպիսով, երբ n-ը կենտ է, մենք պետք է իրարից տարբերենք $f(x)=\sqrt[n]{x}$ և $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիաները: Առաջին ֆունկցիայի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է, իսկ երկրորդ ֆունկցիան որոշված է միայն $[0,\infty)$ կիսաառանցքի վրա: Իհարկե, զույգ n-երի համար այդ երկու ֆունկցիաները նույնն են, քանի որ երկուսն էլ որոշված են միայն ոչ բացասական x-երի համար:

Այժմ նշենք $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները:

1) ***Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը ոչ բացասական կիսաառանցքն է՝*** $\boldsymbol{D(f)=[0;\infty)}$:

2) ***Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը ոչ բացասական կիսաառանցքն է*** $\boldsymbol{E(f)=[0;\infty)}$, քանի որ նրա արժեքները փոքր չեն 0-ից, իսկ կամայական $y\geq 0$ արժեք ֆունկցիան ընդունում է $x=y^n$ կետում:

3) ***Ֆունկցիան ունի մեկ զրո՝*** $\boldsymbol{f(0)=0}$ ***և դրական է, երբ*** $\boldsymbol{x\in(0,\infty)}$: Ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է առաջին քառորդում:

4) ***Ֆունկցիան աճող է իր որոշման տիրույթում***, քանի որ $0\leq x_1<x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ $\sqrt[n]{x_1}<\sqrt[n]{x_2}$:

5) ***Ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը*** $\boldsymbol{0}$***-ն է, որը ֆունկցիան ընդունում է*** $\boldsymbol{x=0}$ ***կետում: Ֆունկցիան մեծագույն արժեք չունի***:

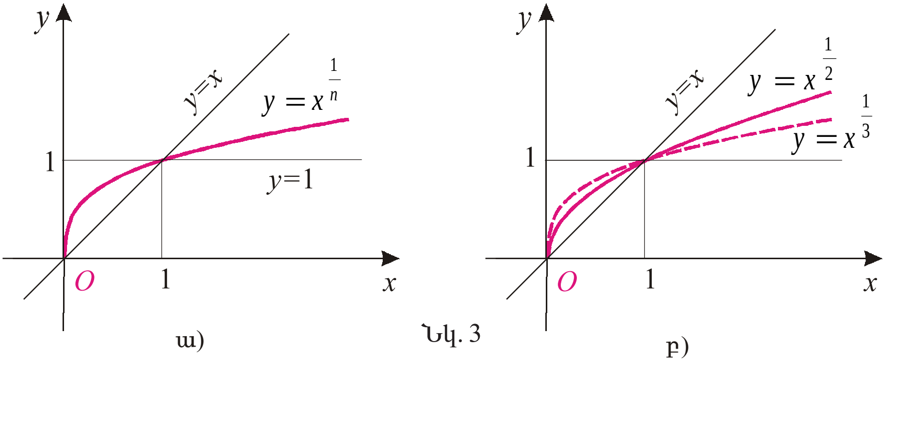
Ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է $(0;0)$, $(1;1)$ կետերով և այդ կետերում հատում է $y=x$ ուղիղը: Երբ $n=1$, այն համընկնում է այդ ուղղի հետ:

Երբ $n>1$, ֆունկցիայի գրաֆիկը $0<x<1$ տեղամասում գտնվում է $y=x$ ուղղից վերև, քանի որ

$$0<x<1\Rightarrow\sqrt[n]{x}>x:$$

Իսկ $x=1$ կետից աջ ֆունկցիայի գրաֆիկը կգտնվի $y=x$ և $y=1$ ուղիղների միջև, քանի որ

$$x>1\Rightarrow 1<\sqrt[n]{x}<x:$$



Նկ. 3

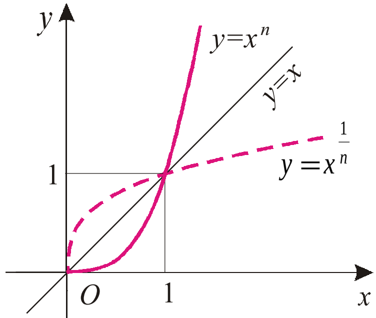
Արգումենտի անվերջ մեծանալու հետ ֆունկցիայի արժեքները անվերջ մեծանում են: Նկ. 3ա-ում պատկերված է $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի սխեմատիկ տեսքը:

Դիտարկելով $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը տարբեր n-երի համար, տեսնում ենք, որ n-ը մեծացնելիս այն $0<x<1$ տեղամասում բարձրանում է վեր, իսկ $x=1$ կետից աջ իջնում է ցած՝ «սեղմվելով» դեպի $y=1$ ուղիղը (տե՛ս նկ. 3բ):

Ինչպես տեսանք նախորդ պարագրաֆում, $f(x)=x^n$ աստիճանային ֆունկցիան աճում է $[0,\infty)$ միջակայքում: Հետևաբար, այն հակադարձելի է, ընդ որում,

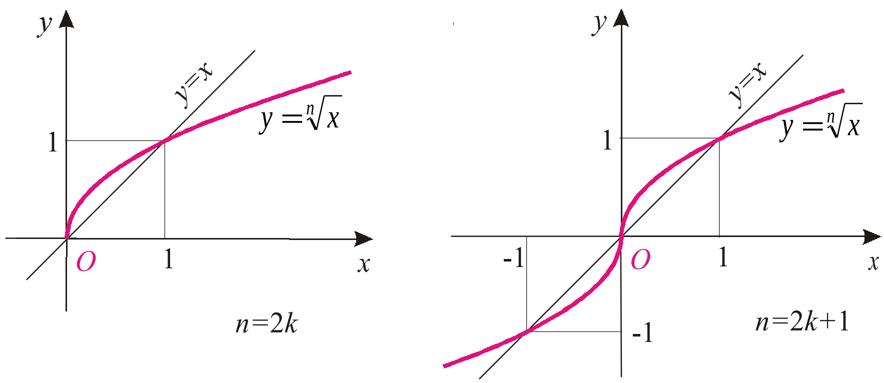
> ***$f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիան $[0,\infty)$ միջակայքում տրված $f(x)=x^n$ ֆունկցիայի հակադարձն է:***

Սա նշանակում է, որ $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ և $f(x)=x^n$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են $y=x$ ուղղի նկատմամբ (նկ. 4):



Նկ. 4

Ինչպես նշեցինք այս պարագրաֆի սկզբում, զույգ n-ի դեպքում $f(x)=\sqrt[n]{x}$ և $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիաները նույնն են (նկ. 5, ա): Իսկ եթե n-ը կենտ է, ապա $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա և $[0,\infty)$ միջակայքում համընկնում է $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ֆունկցիայի հետ: Քանի որ այս դեպքում $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ֆունկցիան կենտ է, դրա գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, և մենք կարող ենք հեշտությամբ կառուցել այն, օգտվելով $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$-ի գրաֆիկից (նկ. 5, բ):



ա) բ)

Նկ. 5

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպիսի՞ թվերի համար և ինչպե՞ս է սահմանվում թվի կոտորակային ցուցիչով աստիճանը:
2. Ճի՞շտ է արդյոք $x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$ հավասարությունը բոլոր x-երի համար:
3. Ո՞րն է $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը, եթե n-ը՝
   ա) զույգ է,   բ) կենտ է:
4. Ո՞րն է $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
5. Ո՞ր քառորդում է $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
6. Մոնոտո՞ն է արդյոք $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիան:
7. Ո՞րն է $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:
8. Ո՞ր կետերում է հատվում $f(x)=x^{1/n}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $y=x$ ուղղի հետ և ինչպե՞ս է այն փոխվում n-ը մեծացնելիս:
9. Կառուցել $f(x)=x^{1/3}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
10. Կառուցել $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Առաջադրանքներ

14. Դիցուք $f(x)=x^{1/7}$: Բաղդատել թվերը.

ա) $f(15)$ և $f(14)$,   բ) $f(5{,}3)$ և $f(5{,}4)$,   գ) $f(0)$ և $f(8{,}3)$:

15. Դիցուք $f(x)=\sqrt[15]{x}$: Բաղդատել թվերը.

ա) $f(9)$ և $f(7)$,   բ) $f(7{,}09)$ և $f(7{,}1)$,   գ) $f(-22)$ և $f(-20)$,

դ) $f(-3{,}2)$ և $f(-3{,}1)$,   ե) $f(-23)$ և $f(23)$,   զ) $f(-8{,}1)$ և $f(6{,}2)$:

Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (16-17).

16. ա) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$,   բ) $f(x)=\sqrt[3]{x}$,

գ) $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$,   դ) $f(x)=\sqrt[4]{x}$:

17. ա) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x-3}\right)^{\frac{1}{5}}$,   բ) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2x-4}}$,

գ) $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{8x}{2x^2-3x+1}}$, դ) $f(x)=\sqrt[7]{\dfrac{5x-10}{x^2-5x+4}}$:

18. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $f(x)=\sqrt{x}$,   բ) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$,   գ) $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}$,

դ) $f(x)=-x^{\frac{1}{4}}$,   ե) $f(x)=\sqrt[5]{x}+3$,   զ) $f(x)=\sqrt[3]{x}-8$:

Գրաֆիկորեն պարզել, թե քանի՞ լուծում ունի հավասարումը (19-20).

19. ա) $x^{\frac{1}{4}}=7$,   բ) $x^{\frac{1}{6}}=-2{,}4$,   գ) $x^{\frac{1}{3}}=-5$, դ) $\sqrt[3]{x}=-5$, ե) $\sqrt[6]{x}=-3{,}1$, զ) $\sqrt[4]{x}=10$:

20. ա) $x^{\frac{1}{4}}=3x$, բ) $x^{\frac{1}{5}}=x+1$, գ) $x^{\frac{1}{3}}=2x^2$:

21. Լուծել հավասարումը.

ա) $x^{\frac{1}{4}}=\sqrt{7}$, բ) $x^{\frac{1}{6}}=\sqrt[3]{4}$, գ) $x^{\frac{1}{3}}=5$,

դ) $\sqrt[3]{x}=-3$, ե) $\sqrt[6]{x}=8^{\frac{1}{2}}$, զ) $x^{\frac{1}{6}}=10^{\frac{2}{3}}$:

Կրկնության համար

22. Ապրանքի գինը երկու անգամ հաջորդաբար բարձրացրին 10%-ով: Արդյունքում քանի՞ տոկոսով բարձրացավ ապրանքի գինը սկզբնականի համեմատ:

23. Ապրանքի գինը երկու անգամ հաջորդաբար իջեցրին 10%-ով: Արդյունքում քանի՞ տոկոսով իջավ ապրանքի գինը սկզբնականի համեմատ:

24. Ապրանքի գինը բարձրացրին 20%-ով, այնուհետև նոր գինը իջեցրին 20%-ով: Արդյունքում քանի՞ տոկոսով փոխվեց ապրանքի գինը սկզբնականի համեմատ:

25. Ապրանքի գինը իջեցրին 20%-ով, այնուհետև նոր գինը բարձրացրին 20%-ով: Արդյունքում քանի՞ տոկոսով փոխվեց ապրանքի գինը սկզբնականի համեմատ:

§3. Ցուցչային ֆունկցիա

Ցուցչային ֆունկցիա կոչվում է

$$f(x)=a^x$$

ֆունկցիան, որտեղ a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է:

Նշենք ցուցչային ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները և կառուցենք գրաֆիկը:

1) ***Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է իրական թվերի բազմությունը՝*** $D(f)=(-\infty,\infty)$:

2) ***Ֆունկցիան դրական է ամբողջ թվային առանցքի վրա***: Ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է առաջին և երկրորդ քառորդներում:

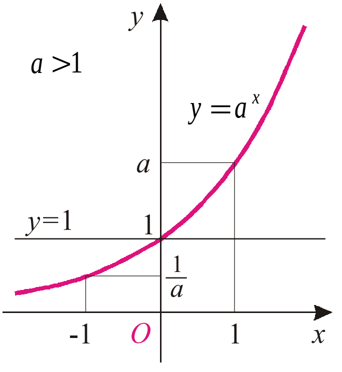
3) ***Ֆունկցիան մոնոտոն է ամբողջ թվային առանցքի վրա: Ընդ որում, այն աճող է, երբ $a>1$ և նվազող՝ երբ $0<a<1$:***

4) ***Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն է դրական կիսաառանցքը՝*** $E(f)=(0,\infty)$:

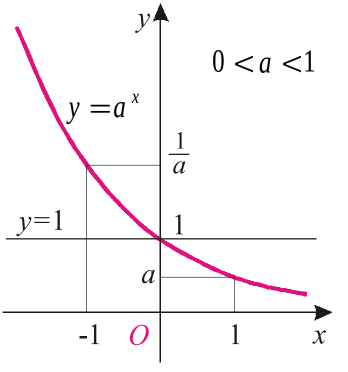
5) Ֆունկցիան չունի զրոներ, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

6) Ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է օրդինատների առանցքը՝ (0, 1) կետում, քանի որ $a^0 = 1$:

$a > 1$ դեպքում ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին քառորդում գտնվում է $y = 1$ ուղղից վեր և դեպի աջ գնալիս ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են: Երկրորդ քառորդում ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է $y = 1$ ուղղի և աբսցիսների առանցքի միջև և դեպի ձախ գնալիս անվերջ մոտենում է աբսցիսների առանցքին (նկ. 6, ա).



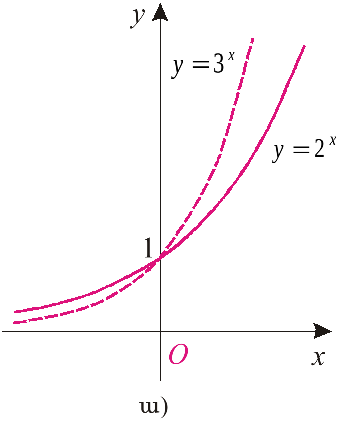
ա)



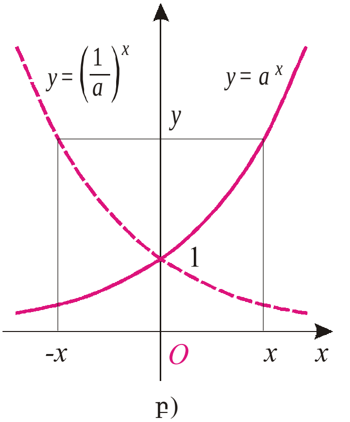
բ)

Նկ. 6

$0 < a < 1$ դեպքում ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին քառորդում գտնվում է $y = 1$ ուղղի և աբսցիսների առանցքի միջև և դեպի աջ գնալիս անվերջ մոտենում է աբսցիսների առանցքին: Երկրորդ քառորդում այն գտնվում է $y = 1$ ուղղից վեր, և դեպի ձախ գնալիս ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են (նկ. 6, բ): Նկ. 7, ա-ում պատկերված է տարբեր հիմքերով ցուցչային ֆունկցիաների փոխադարձ դիրքը:



ա)



բ)

Նկ. 7

Նկատենք, որ $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ հավասարության համաձայն, եթե (x, y) կետը պատկանում է $f(x) = a^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $(-x, y)$ կետը պատկանում է $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Սա նշանակում է, որ (նկ. 7, բ)

> ***$f(x) = a^x$ և $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ:***

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում ցուցչային ֆունկցիա:
2. Ո՞րն է ցուցչային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
3. Ո՞ր քառորդներում է գտնվում ցուցչային ֆունկցիայի գրաֆիկը:
4. Ե՞րբ է ցուցչային ֆունկցիան աճող և ե՞րբ՝ նվազող:
5. Ո՞րն է ցուցչային ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:
6. Կառուցել $y = 3^x$ և $y = (1/3)^x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:

Առաջադրանքներ

26. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը և գտնել արժեքների բազմությունը.

ա) $y = 2^x$, բ) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, գ) $y = -5^x$,

դ) $y = (1{,}5)^x - 4$, ե) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 5$, զ) $y = -3^{\frac{x}{2}} + 1$:

27. Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում f ցուցչային ֆունկցիան ամբողջ թվային առանցքի վրա՝ 1) աճում է, 2) նվազում է.

ա) $f(x) = a^x$, բ) $f(x) = (a-1)^x$,

գ) $f(x) = (2a+3)^x$, դ) $f(x) = |a|^x$:

➤ **28.** Գրաֆիկորեն պարզել, թե քանի՞ լուծում ունի հավասարումը.

ա) $7^x = 5$, բ) $(0{,}1)^x - 3 = 0$, գ) $4 + \left(\sqrt{3}\right)^x = 0$,

դ) $\left(\sqrt{2}\right)^{-x} + 2 = 0$, ե) $4^x - 2 = 3^{-2x}$, զ) $(1{,}7)^x = (0{,}8)^x + 1$:

29. Բանկում դրվել է 1000000 դրամ ավանդ՝ տարեկան 10% տոկոսադրույքով, բարդ տոկոսի հաշվարկով (այսինքն, յուրաքանչյուր տարվա վերջում տարեսկզբում եղած գումարն ավելանում է 10% -ով):

ա) Որքա՞ն գումար կլինի բանկում 1 տարի հետո:

բ) Որքա՞ն եկամուտ կունենա ավանդատուն 2 տարի հետո:

գ) Գտեք ավանդի գումարի ֆունկցիոնալ կախվածությունը տարիների քանակից:

դ) Քանի՞ տարի հետո գումարը կգերազանցի 1450000 դրամը:

30. Մի ռադիոակտիվ նյութ ռադիոակտիվ քայքայման հետևանքով մեկ տարվա ընթացքում կորցնում է իր զանգվածի 20 տոկոսը: Այդ նյութից մի քարակտորի զանգվածը 100 գ է:

ա) Որքա՞ն կլինի քարակտորի զանգվածը 1 տարի հետո:

բ) Որքանո՞վ պակասած կլինի նրա զանգվածը 2 տարի հետո:

գ) Գտեք քարակտորի զանգվածի ֆունկցիոնալ կախվածությունը տարիների քանակից:

դ) Քանի՞ տարի հետո քարակտորի զանգվածը սկզբնականի կեսից քիչ կլինի:

➢31. Գտնել ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը և մեծագույն ու փոքրագույն արժեքները.

ա) $y = 6^{\sqrt{x}}$, բ) $y=(0{,}1)^{x^2}$, գ) $y=3^{\sin x}-\dfrac{1}{3}$:

➢32. Գրաֆիկորեն ցույց տալ, որ հավասարման լուծումն է՝ $x=0$.

ա) $5^x=1-x$, բ) $(0{,}3)^x=2x+1$, գ) $\left(\sqrt{5}\right)^{-x}-1=0{,}3x$:

33. Արտահայտությունը ձևափոխել $c\cdot a^x$ տեսքի.

ա) $3^{x+3}\cdot 9^{2x-1}$, բ) $6^{x+2}\cdot 2^{3x-1}$, գ) $5^{x+3}\cdot(0{,}1)^{2-x}$,

դ) $(0{,}5)^{1-5x}\cdot 3^{2x+4}$, ե) $\left(\sqrt[4]{9}\right)^{6x+3}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{2x-1}$, զ) $\left(\sqrt{125}\right)^{4x-2}\cdot 5^{5-3x}$:

➢34. Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում f ցուցչային ֆունկցիան աճող է ամբողջ թվային առանցքի վրա.

ա) $f(x)=\left(10-a^2\right)^x$, բ) $f(x)=\left(\dfrac{2a-4}{a+3}\right)^{5x}$, գ) $f(x)=|6a-5|^x$:

➢35. Գտնել a պարամետրի այն արժեքները, որոնց դեպքում f ցուցչային ֆունկցիան նվազող է ամբողջ թվային առանցքի վրա.

ա) $f(x)=\left(17-4a^2\right)^x$, բ) $f(x)=\left(\sqrt{6a^2-5a}\right)^x$, գ) $f(x)=|9-4a|^x$:

Հաշվել արտահայտության արժեքը տրված պայմանի դեպքում (36-37).

➢36. ա) 4^x+4^{-x}, եթե $2^x+2^{-x}=7$,

բ) $5^{2x}+5^{-2x}$, եթե $5^x+(0{,}2)^x=3$,

գ) $9^x+\dfrac{1}{9^x}$, եթե $3^x+\dfrac{1}{3^x}=5$:

➢37. ա) 8^x+8^{-x}, եթե $2^x+2^{-x}=3$,

բ) $7^{3x}-7^{-3x}$, եթե $7^x-7^{-x}=4$,

գ) 16^x+16^{-x}, եթե $2^x+2^{-x}=5$:

➢38. Դիցուք տրված են d տարբերությամբ (a_n) թվաբանական պրոգրեսիան, $f(x)=a^x$ ցուցչային ֆունկցիան, և $b_n=f(a_n)$, $n=1,2,\ldots$:

1) Գտնել $\frac{b_2}{b_1}$, $\frac{b_5}{b_4}$, $\frac{b_{10}}{b_9}$ հարաբերությունները:

2) Գտնել $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ հարաբերությունը, որտեղ $n=1,2,\dots$:

3) Ապացուցել, որ (b_n) հաջորդականությունը երկրաչափական պրոգրեսիա է և գտնել նրա հայտարարը:

4) Պարզել (b_n) պրոգրեսիայի աճող կամ նվազող լինելը, եթե.

ա) $a>1,\ d>0$, բ) $a>1,\ d<0$, գ) $0<a<1,\ d>0$, դ) $0<a<1,\ d<0$:

Կրկնության համար

39. Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$, բ) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$,

գ) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$, դ) $\cos^6\alpha-\sin^6\alpha=\frac{3\cos 2\alpha+\cos^3 2\alpha}{4}$:

40. Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin\left(\pi-\arcsin\frac{1}{3}\right)$, բ) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\arccos\frac{2}{5}\right)$,

գ) $\cos\left(2\pi-\arccos\frac{3}{4}\right)$, դ) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{6}\right)$:

§4. Ցուցչային հավասարումներ

Դիտարկենք ***պարզագույն ցուցչային հավասարումը***՝

$$a^x=b, \qquad (1)$$

որտեղ $a>0,\ a\neq 1$: Քանի որ $f(x)=a^x$ ցուցչային ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը բոլոր դրական թվերի բազմությունն է, ուրեմն

եթե $b\le 0$, ապա (1) հավասարումը լուծում չունի,
եթե $b>0$, ապա (1) հավասարումն ունի միակ լուծում:

Լուծման միակությունը բխում է ցուցչային ֆունկցիայի մոնոտոն լինելուց, քանի որ մոնոտոն ֆունկցիան չի կարող տարբեր կետերում ընդունել միևնույն՝ b արժեքը:

Այդ լուծումը գտնելու համար հարկավոր է b թիվը ներկայացնել a հիմքով աստիճանի տեսքով՝ $b=a^c$, որից հետո (1) հավասարումը կստանա

$$a^x=a^c$$

տեսքը, իսկ վերջինիս լուծումն է՝ $x = c$:

Օրինակ 1: Լուծենք $2^x = 4\sqrt[5]{16}$ հավասարումը:

Քանի որ $4\sqrt[5]{16} = 2^{2+\frac{4}{5}} = 2^{2,8}$, այն համարժեք է $2^x = 2^{2,8}$ հավասարմանը, որի լուծումն է՝ $x = 2,8$:

Պատասխան՝ 2,8 :

Այն դեպքում, երբ (1) հավասարման մեջ x-ի փոխարեն գրված է փոփոխական պարունակող արտահայտություն, լուծումը գտնվում է նման ձևով:

Օրինակ 2: Լուծենք

$$(0,2)^{2x^2-8x} = 125\sqrt{5}$$

հավասարումը: Գրելով այն

$$5^{-\left(2x^2-8x\right)} = 5^{3,5}$$

տեսքով, կստանանք

$$2x^2 - 8x + 3,5 = 0$$

քառակուսային հավասարումը, որի արմատներն են՝ $x_1 = 0,5$, $x_2 = 3,5$:

Պատասխան՝ 0,5; 3,5 :

Ստորև մենք կքննարկենք ցուցչային հավասարումների մի քանի՝ առավել հաճախ հանդիպող տեսակներ:

ա) Հավասարումներ, որոնք աստիճանի հիմնական հատկությունների օգտագործմամբ բերվում են պարզագույն ցուցչային հավասարման:

Օրինակ 3: Լուծենք

$$\frac{3}{4} \cdot 2^{x+3} + 10 \cdot 2^{x-1} = \frac{11}{8}$$

հավասարումը: Այն համարժեք է

$$2^{x-1}\left(\frac{3}{4} \cdot 2^4 + 10\right) = \frac{11}{8},$$

հավասարմանը, որտեղից ստանում ենք՝

$$2^{x-1} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^{-4} \Leftrightarrow x - 1 = -4 \Leftrightarrow x = -3 :$$

Պատասխան՝ -3 :

Օրինակ 4: Լուծենք

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x = 20 \cdot 3^{x-3}$$

հավասարումը: Ձևափոխելով, ստանում ենք.

$$\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5}\right)^x = \frac{20}{27} \cdot 3^x \;\Leftrightarrow\; 2^x = \frac{8}{27} \cdot 3^x :$$

Վերջին հավասարման երկու կողմերը բաժանելով 3^x-ի, կստանանք

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

պարզագույն ցուցչային հավասարումը, որի լուծումն է՝ $x = 3$ ։

Պատասխան՝ 3 ։

բ) *Հավասարումներ, որոնք աստիճանի հիմնական հատկությունների օգտագործմամբ բերվում են*

$$\boldsymbol{a^{2x} + p \cdot a^x + q = 0} \qquad (2)$$

տեսքի հավասարման:

Վերջինս $a^x = t$ տեղադրմամբ հանգում է $t^2 + pt + q = 0$ քառակուսային հավասարմանը:

Օրինակ 5: Լուծենք

$$9^x - 24 \cdot 3^{x-2} = 1$$

հավասարումը: Այն բերվում է

$$3^{2x} - 24 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot 3^x = 1$$

հավասարմանը, որտեղից ստանում ենք՝

$$3 \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 3 = 0 ։$$

Նշանակելով $3^x = t$, կստանանք

$$3t^2 - 8t - 3 = 0$$

քառակուսային հավասարումը, որի արմատներն են՝

$$t_1 = -1/3, \quad t_2 = 3 ։$$

Վերադառնալով նշանակմանը՝ կստանանք

$$3^x = -\frac{1}{3} \text{ և } 3^x = 3$$

պարզագույն ցուցչային հավասարումները, որոնցից առաջինը լուծում չունի, քանի որ $3^x > 0$, իսկ երկրորդի արմատն է՝ $x = 1$ ։

Պատասխան՝ 1։

գ) *Հավասարումներ, որոնք աստիճանի հիմնական հատկությունների օգտագործմամբ բերվում են*

$$\boldsymbol{c^{2x} + p \cdot c^x \cdot d^x + q \cdot d^{2x} = 0} \qquad (3)$$

տեսքի համասեռ հավասարման:

Քանի որ $d^{2x} > 0$ բոլոր x-երի համար, բաժանելով (3) հավասարման երկու մասերը d^{2x}-ի և նշանակելով $\left(\frac{c}{d}\right)^x = t$, կստանանք նրան համարժեք

$$t^2 + pt + q = 0$$

քառակուսային հավասարումը:

Օրինակ 6: Լուծենք

$$9^{x+1}+5\cdot 6^x-4^{x+1}=0$$

հավասարումը: Այն համարժեք է

$$9\cdot 9^x+5\cdot 3^x\cdot 2^x-4\cdot 4^x=0$$

հավասարմանը, որի երկու կողմերը բաժանելով 4^x -ի, կստանանք.

$$9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x-4=0:$$

Նշանակելով $(3/2)^x=t$, հանգում ենք $9t^2+5t-4=0$ քառակուսային հավասարմանը, որի արմատներն են՝ $t_1=-1,\ t_2=4/9$: Վերադառնալով նշանակմանը, կստանանք

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=-1 \text{ և } \left(\frac{3}{2}\right)^x=4/9$$

պարզագույն ցուցչային հավասարումները, որոնցից առաջինը լուծում չունի, իսկ երկրորդի արմատն է՝ $x=-2$:

Պատասխան՝ -2:

Հակացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է պարզագույն ցուցչային հավասարումը:
2. Քանի՞ լուծում ունի (1) հավասարումը, եթե՝ ա) $b>0$, բ) $b\le 0$:
3. Ինչպե՞ս են լուծում (2) տեսքի ցուցչային հավասարումը:
4. Ինչպե՞ս են լուծում (3) տեսքի ցուցչային հավասարումը:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (41-42).

41. ա) $2^x=32$, բ) $5^x=0{,}2$, գ) $(0{,}2)^x=\sqrt{5}$,

դ) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=16$, ե) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{16}{81}$, զ) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt[3]{3}$:

42. ա) $3^{x+2}=81$, բ) $(0{,}2)^{x-3}=125$, գ) $\left(\sqrt{3}\right)^{x-5}=27$,

դ) $\left(\sqrt{0{,}5}\right)^{2-x}=32$, ե) $(0{,}25)^{2x-1}=64$, զ) $(0{,}125)^{3-x}=2\sqrt{2}$:

Պարզել հավասարման արմատի նշանը (43-44).

43. ա) $2^x=7$, բ) $3^x=0{,}6$, գ) $(0{,}2)^x=6{,}3$, դ) $(0{,}9)^x=9$:

44. ա) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)^x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, բ) $\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}\right)^x=\frac{\sqrt{10}}{4}$, գ) $\left(\frac{\sqrt{10}}{\pi+1}\right)^x=\frac{\sqrt{9,5}}{3}$, դ) $\left(\frac{\pi-2}{\sqrt{6}}\right)^x=\frac{\sqrt{24,9}}{5}$ ։

Լուծել հավասարումը (45-56).

45. ա) $6^{3x+2}=6^{2x+7}$, բ) $5^{4x+1}=(0,2)^{x-6}$,

գ) $4^{x+2}=2\cdot 8^{x-1}$, դ) $25^{x-0,5}=125\left(\sqrt{0,2}\right)^{3-x}$,

ե) $8^{|x|-2}=(0,25)^{0,5-x}$, զ) $9^{|x+1|}=27\sqrt{3^x}$ ։

➤**46.** ա) $9\sqrt{27^x}=\left(\sqrt[3]{81}\right)^{x+1}$, բ) $49^{x-1}=7\sqrt{7^{x+3}}$,

գ) $(0,6)^x=\left(2\frac{7}{9}\right)^{0,5-\sqrt{x}}$, դ) $\left(\sqrt{7\sqrt[3]{7}}\right)^{x+2}=\left(\sqrt[3]{7\sqrt{7^x}}\right)^{x+3}$ ։

47. ա) $7^x\cdot 2^{x-1}=98$, բ) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{x-1}=\frac{3}{8}$,

գ) $\frac{2^{x+3}\cdot 25^{x-1}}{4^x\cdot 5^x}=5$, դ) $\frac{(0,04)^x\cdot 9^{x-1}}{3^{3x}}=625$ ։

48. ա) $5^{x+2}-9\cdot 5^{x-1}=116$, բ) $10\cdot(0,5)^x-2^{3-x}=64$,

գ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}=138$, դ) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-1}+4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{x+1}=40$,

ե) $5^x+5^{x+1}-5^{x-1}=725$, զ) $3^{2x-1}-9^{x-1}+27^{\frac{2}{3}x-1}=567$ ։

49. ա) $9^{x-1}=2^{x-1}$, բ) $9\cdot 5^{x-1}-3^{x+1}=0$,

գ) $64\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^x-81\cdot\left(\frac{16}{9}\right)^{x+1}=0$, դ) $3\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^x=14\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{x-1}$,

ե) $5^{2x+6}=3^{3x+9}$, զ) $(0,2)^{3x-6}=(0,5)^{4x-8}$ ։

50. ա) $2^{x-1}-3^x=3^{x-1}-2^{x+2}$, բ) $4^x+9^{x+1}=2\cdot 4^{x+1}-\frac{3}{2}\cdot 9^x$,

գ) $2^{x+3}-7^{x-2}=7^{x-1}+2^x$, դ) $11^{x-1}-7^{x-1}=4\left(11^{x-2}+7^{x-2}\right)$։

51. ա) $10^{2x+13}=2^{x+26}\cdot 5^{3x}$, բ) $2^{x-1}\cdot 3^{x-1}=3\sqrt{2^x}$,

գ) $8^{x-1}\cdot 9^{2x-3}=6^{x+3}$, դ) $3^{x+26}\cdot 125^x=15^{2x+13}$,

ե) $25^{x-1}\cdot 2^{2x-5}-4^{x-2}\cdot 5^{2x-3}=750$, զ) $2^{2x-1}\cdot 9^{x-2}+4^{x-1}\cdot 3^{2x-3}=720$ ։

52. ա) $3^{2x}-80\cdot 3^x-81=0$, բ) $49^x-6\cdot 7^x-7=0$,

գ) $\left(\frac{1}{36}\right)^x-5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x-6=0$, դ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+2}=8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+9$ ։

53. ա) $2^x - 6\cdot\left(\sqrt{2}\right)^x - 16 = 0$, բ) $3^{1+\sqrt{x}} + 3^{1-\sqrt{x}} = 10$,

գ) $18^x + 27\cdot 2^{3-x} = 14\cdot 3^{x+1}$, դ) $5\cdot 5^x - 24 = 25\cdot(0{,}2)^{x+1}$:

54. ա) $9^x + 6^x = 2\cdot 4^x$, բ) $4\cdot 9^x + 12^x = 3\cdot 4^{2x}$,

գ) $9\cdot 3^x + 5\cdot 6^{\frac{x}{2}} = 2^{x+2}$, դ) $3^{x+4} + 45\cdot 6^{\frac{x}{2}} = 9\cdot 2^{x+2}$:

➤**55.** ա) $3\cdot 2^{x+1} + 2\cdot 3^{x+1} = 13\cdot\left(\sqrt{6}\right)^x$, բ) $7\cdot 5^x + 2\cdot\left(\sqrt{35}\right)^x - 5\cdot 7^x = 0$,

գ) $7\left(\frac{1}{9}\right)^x + 4\cdot\left(\frac{1}{21}\right)^x = 3\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{2x}$, դ) $4\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} - 21\cdot(0{,}1)^x = 25\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x$:

* **56.** ա) $(5x-9)^{x-\sqrt{x}} = (5x-9)^2$, բ) $\left(\frac{x^2-1}{5}\right)^{|x|} = \left(\frac{x^2-1}{5}\right)^{6-x^2}$:

* **57.** Ցույց տալ, որ հավասարումների լուծումները տրված թվերն են՝

ա) $3^x - 2^x = 19$, $x = 3$, բ) $7^x - 3^{x+1} = 22$, $x = 2$,

գ) $3^x + 4^x = 5^x$, $x = 2$, դ) $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$, $x = 3$:

* **58.** Լուծել հավասարումը.

ա) $9^x + 4^x = 12^x + 1$, բ) $9^x - 5^x = 4^x + 2\left(\sqrt{20}\right)^x$:

Գտնել a -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի լուծում (59-60).

➤**59.** ա) $(0{,}3)^x = 5a - 8$, բ) $\left(\frac{7}{5}\right)^{x+1} = \frac{1}{2a+3}$, գ) $\left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{a}{1-a}$:

➤**60.** ա) $\left(\sqrt{5}-2\right)^x = 5 - |2a-7|$, բ) $(\pi - 1)^x = 2 - \sqrt{a-6}$:

* **61.** Գտնել a -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի դրական լուծում.

ա) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{3a-4}{a+2}$, բ) $\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^x = \left|\frac{2a-3}{5}\right|$:

* **62.** Գտնել a -ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի բացասական լուծում.

ա) $(\pi - 2)^x = \left|\frac{5-3a}{4}\right|$, բ) $\left(\sqrt{4-\pi}\right)^x = \frac{a^2-a}{6}$:

Կրկնության համար

63. Լուծել անհավասարումների համակարգը.

ա) $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \ge 0 \\ 5x - 4 < 0 \end{cases}$, բ) $\begin{cases} 5x^2 + 9x - 2 < 0 \\ 7x + 3 \le 0 \end{cases}$, գ) $\begin{cases} 3x^2 - x - 10 > 0 \\ 2x + 14 \ge 0 \end{cases}$:

64. Լուծել անհավասարումների համախումբը.

ա) $\left[\begin{array}{l}4x^2-3x-1\geq 0\\13x-4\leq 0\end{array}\right.$, բ) $\left[\begin{array}{l}3x^2+7x-6<0\\21x-5>0\end{array}\right.$, գ) $\left[\begin{array}{l}5x^2+4x-1<0\\x+1<0\end{array}\right.$:

§5. Ցուցչային անհավասարումներ

Պարզագույն ցուցչային անհավասարումներ են

$$a^x>b \quad \text{և} \quad a^x<b \qquad (1)$$

անհավասարումները, որտեղ a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է:

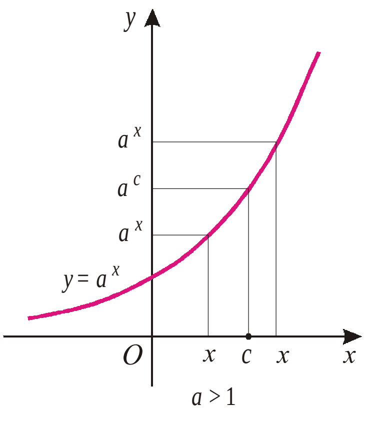
Նախ քննարկենք $b\leq 0$ դեպքը: Մենք գիտենք, որ a^x մեծությունը կամայական x թվի համար դրական է: Դա նշանակում է, որ,

> ***եթե $b\leq 0$, ապա $a^x>b$ անհավասարման լուծումն է $(-\infty,\infty)$,***
> ***եթե $b\leq 0$, ապա $a^x<b$ անհավասարումը լուծում չունի:***

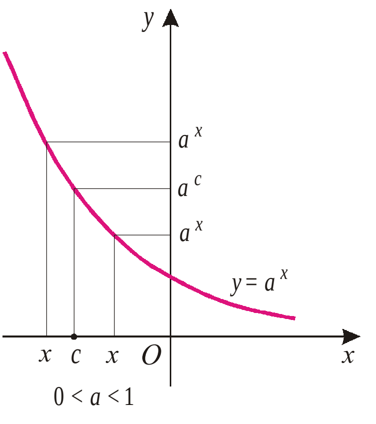
Լուծումները նույնն են նաև ոչ խիստ անհավասարությունների դեպքում:

Երբ b-ն դրական է, հարկավոր է այն ներկայացնել a հիմքով աստիճանի տեսքով՝ $b=a^c$, որից հետո (1) անհավասարումները կստանան $a^x>a^c$ և $a^x<a^c$ տեսքերը:

Ենթադրենք $a>1$: Քանի որ $f(x)=a^x$ ցուցչային ֆունկցիան աճում է ամբողջ թվային առանցքի վրա, իսկ c կետում նրա արժեքը հավասար է a^c, ուրեմն $x>c$ դեպքում կունենանք՝ $a^x>a^c$, իսկ $x<c$ դեպքում՝ $a^x<a^c$ (նկ. 8ա): Հետևաբար,



ա)



բ)

Նկ. 8

> ***եթե $a>1$, ապա՝***
> **ա) $a^x>a^c$ անհավասարման լուծումն է՝ $x>c$,**
> ***բ) $a^x<a^c$ անհավասարման լուծումն է՝ $x<c$:***

Համանմանորեն, հաշվի առնելով, որ $0<a<1$ դեպքում $f(x)=a^x$ ցուցչային ֆունկցիան նվազում է ամբողջ թվային առանցքի վրա կստանանք (նկ. 8բ).

եթե $0<a<1$, *ապա*՝

ա) $a^x > a^c$ **անհավասարման լուծումն է՝** $x<c$,

բ) $a^x < a^c$ **անհավասարման լուծումն է՝** $x>c$։

Նույն ձևով են լուծվում նաև պարզագույն ոչ խիստ անհավասարումները.

Տրված ցուցչային անհավասարումը պարզագույն անհավասարման բերելու համար կիրառվում են այն մեթոդները, որոնց մենք ծանոթացանք ցուցչային հավասարումներ լուծելիս:

Այստեղ կարևոր է նշել, որ անհավասարման երկու կողմերը a^x տեսքի արտահայտության վրա բաժանելուց ստացված անհավասարումը համարժեք է սկզբնականին, քանի որ $a^x>0$ ամբողջ թվային առանցքի վրա: Դիտարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1: Լուծենք

$$3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3}+4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}>7$$

անհավասարումը: Այն համարժեք է

$$3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x}+4\cdot\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x}>7$$

անհավասարմանը, որտեղից ստանում ենք՝

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\left(\frac{64}{9}+\frac{16}{3}\right)>7\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{x}>\left(\frac{3}{4}\right)^{2}:$$

Քանի որ աստիճանի հիմքը փոքր է մեկից՝ $\frac{3}{4}<1$, լուծումը կլինի՝ $x<2$:

Պատասխան՝ $(-\infty;\,2)$:

Օրինակ 2: Լուծենք

$$\sqrt[3]{49^{x^2-1}}<\sqrt{343^{x+1}}$$

անհավասարումը: Ներկայացնելով անհավասարման աջ և ձախ մասերը 7-ի աստիճանի տեսքով, ստանում ենք

$$7^{\frac{2\left(x^2-1\right)}{3}}<7^{\frac{3(x+1)}{2}}$$

անհավասարումը: Քանի որ $7>1$, անհավասարումը համարժեք է

$$\frac{2\left(x^2-1\right)}{3}<\frac{3(x+1)}{2}$$

քառակուսային անհավասարմանը, որի լուծումն է՝ $x\in(-1;\,3{,}25)$:

Պատասխան՝ $(-1;\,3{,}25)$:

Օրինակ 3: Լուծենք

$$4^{x+1}-9\cdot2^{x+2}+32\geq0$$

անհավասարումը: Այն համարժեք է

$$4\cdot 2^{2x}-36\cdot 2^{x}+32\geq 0$$

անհավասարմանը, որը $2^{x}=t$ նշանակումով հանգում է

$$t^{2}-9t+8\geq 0$$

քառակուսային անհավասարմանը: Գտնելով $t^{2}-9t+8=0$ հավասարման արմատները՝ $t_1=1$, $t_2=8$, կստանանք.

$$\left[\begin{array}{l}t\leq 1\\ t\geq 8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{x}\leq 1\\ 2^{x}\geq 8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq 0\\ x\geq 3\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;0]\cup[3;\infty):$$

Պատասխան՝ $(-\infty;0]\cup[3;\infty)$:

Օրինակ 4: Լուծենք

$$25^{x}+8\cdot 15^{x}-3^{2x+2}\leq 0$$

անհավասարումը: Այն համարժեք է

$$5^{2x}+8\cdot 5^{x}\cdot 3^{x}-9\cdot 3^{2x}\leq 0$$

անհավասարմանը, որի երկու կողմերը բաժանելով 3^{2x}-ի, կունենանք.

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}+8\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x}-9\leq 0:$$

Նշանակելով $(5/3)^{x}=t$, կստանանք

$$t^{2}+8t-9\leq 0$$

քառակուսային անհավասարումը, որը համարժեք է

$$\begin{cases}t\geq -9\\ t\leq 1\end{cases}$$

համակարգին: Վերադառնալով նշանակմանը, կստանանք.

$$\begin{cases}\left(\frac{5}{3}\right)^{x}\geq -9\\ \left(\frac{5}{3}\right)^{x}\leq\left(\frac{5}{3}\right)^{0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;\infty)\\ x\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow(-\infty;0]:$$

Պատասխան՝ $(-\infty,0]$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Որոնք են պարզագույն ցուցչային անհավասարումները:
2. Ո՞րն է $a^{x}>b$ անհավասարման լուծումը, եթե $b\leq 0$:
3. Ո՞րն է $a^{x}<b$ անհավասարման լուծումը, եթե $b\leq 0$:
4. Ո՞րն է $a^{x}>a^{c}$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a>1$, բ) $0<a<1$:
5. Ո՞րն է $a^{x}\leq a^{c}$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a>1$, բ) $0<a<1$:

Առաջադրանքներ

Լուծել անհավասարումը (65-79).

65. ա) $2^x < 16$, բ) $5^x \ge 0{,}2$, գ) $(0{,}2)^x < 125$,

դ) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \ge 64$, ե) $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{9}{4}$, զ) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le 27$,

է) $(0{,}25)^x > 16$, ը) $\left(\sqrt{2}\right)^x \ge 0{,}125$, թ) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^x < 0{,}04$:

66. ա) $\left(\sqrt{7}\right)^{x+1} < 49$, բ) $(0{,}2)^{x-1} < 25$, գ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{x+2} \le 27$,

դ) $\left(\frac{49}{\sqrt{7}}\right)^{3-5x} > \frac{1}{343}$, ե) $2^{|2x+3|} < 0{,}25$, զ) $(0{,}2)^{|2x-5|} > 125$:

67. ա) $3^{x+1} \cdot 5^{x-2} < 27$, բ) $\left(\sqrt{2}\right)^{x+2} \cdot \left(\sqrt[3]{4}\right)^{x-3} \ge 32$,

գ) $\left(\frac{5}{9}\right)^{x-7} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6-x} \le \frac{16}{45}$, դ) $\left(\frac{27}{25}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{2x-1} > \frac{5}{81}$,

ե) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x-4} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{6-x} < \frac{1}{8}$, զ) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{x}-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{x}+1} > \frac{1}{72}$:

68. ա) $2^{3x^2+x-6} > 0{,}25$, բ) $\left(\frac{\sqrt[3]{32}}{8}\right)^{2x^2+3x-2} \le \frac{1}{16}$, գ) $(1{,}5)^{|5x-3|-6} \le \frac{8}{27}$,

դ) $(0{,}6)^{3-|x+7|} > \frac{25}{9}$, ե) $\left(\frac{5}{6}\right)^{\sqrt{x+1}} > 1{,}44$, զ) $81 \cdot (1{,}8)^{\sqrt{x^2-9}-6} > 25$:

69. ա) $3 \cdot 2^{x+2} - 5 \cdot 2^{x-1} \ge 19$, բ) $7 \cdot 3^{x-3} - 6 \cdot 3^{x-4} < 5$,

գ) $8 \cdot (0{,}8)^{x-1} - 5 \cdot (0{,}8)^{x+1} < 7{,}5$, դ) $9 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{x-2} - \left(\sqrt{2}\right)^{x+2} \ge 5$,

ե) $2^{3-x} - 7 \cdot (0{,}5)^x \le 8$, զ) $5^{2-x} - 6 \cdot (0{,}2)^x < 3{,}8$,

է) $\left(\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}}\right)^{4x+8} - 18 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{2x-4} > \frac{7}{81}$, ը) $16 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} - 81 \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{x-2} < 0$:

70. ա) $125^{1+x} > (0{,}04)^{3-x^2}$, բ) $(0{,}4)^{x^2-x} \le (6{,}25)^{1-x}$,

գ) $\left(\frac{\sqrt{7}}{49}\right)^{x-8} > \left(\frac{\sqrt[3]{7}}{7}\right)^{2\sqrt{x}+10}$, դ) $\left(\frac{25}{\sqrt[3]{5}}\right)^{x-6} \le \left(\frac{25}{\sqrt[4]{125}}\right)^{1+\sqrt{x}}$:

71. ա) $4 \cdot 6^x \ge 9 \cdot 4^x$, բ) $(2{,}5)^x - 4 \cdot 5^x < 0$,

գ) $2^{3x} - 1{,}25 \cdot 10^x \ge 0$, դ) $\frac{1}{10^x} > 8 \cdot 5^{-x}$:

72. ա) $9^{-x} < \frac{16}{6^{x+2}}$, բ) $2^{\frac{x}{2}-1} \le 3^{2x-4}$,

գ) $10^{2x-5} > 5^{x-2} \cdot 8^{x-\frac{8}{3}}$, դ) $15^{2x-1} < 27^{x-1} \cdot 5^{x+1}$:

➢73. ա) $2^{x+2} + 3^{x-5} < 3^{x-1} + 2^{x-2}$, բ) $5^{x+10} - 3^{x+10} \ge 3^{x+12} - 5^{x+11}$,

գ) $3^{x+6} - 7^{x+4} < 2\left(3^{x+4} + 7^{x+3}\right)$, դ) $3^{x} - 5^{x-2} \ge 2\left(3^{x-3} + 5^{x-4}\right)$:

74. ա) $9 \cdot 3^{2x} - 82 \cdot 3^{x} + 9 \ge 0$, բ) $4 \cdot 4^{x} - 65 \cdot 2^{x} + 16 < 0$,

գ) $3^{1-2x} - 82 \cdot 3^{-x-1} + 3 \ge 0$, դ) $5^{x-3} + 5 \cdot (0{,}2)^{x-4} \le 26$:

75. ա) $9 \cdot 3^{x} - 82 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{x} + 9 \ge 0$, բ) $2^{x+1} + 7 \cdot 2^{\frac{x}{2}} < 4$,

գ) $11 \cdot 5^{x+2} - 2 \cdot 5^{1-x} < 5$, դ) $4^{\frac{x+2}{x}} + 4^{\frac{x-2}{x}} \ge 10$:

76. ա) $2^{2x} + 5 \cdot 6^{x-1} \ge 9^{x}$, բ) $3 \cdot 5^{2x-1} + 0{,}4 \cdot 15^{x} \ge 9^{x}$:

գ) $3 \cdot 4^{1-x} + 2 \cdot 9^{1-x} < 35 \cdot 6^{-x}$, դ) $7 \cdot 3^{x+1} + 3 \cdot 7^{x+1} \ge 58 \cdot 21^{\frac{x}{2}}$,

➢77. ա) $5 \cdot 2^{x} + 8 \cdot 5^{x-2} < 2{,}8 \cdot \left(\sqrt{10}\right)^{x}$, բ) $49^{-x} + 49 \cdot 25^{-x-1} \ge 2{,}96 \cdot 35^{-x}$:

*** 78.** ա) $\sqrt[3]{5^{3x+1}} - \sqrt[3]{5^{3x-2}} \le 8^{x}$, բ) $\sqrt{7^{2x+1}} - \sqrt{7^{2x-3}} > 3 \cdot 2^{3x-0{,}5}$:

*** 79.** ա) $\left(\frac{x^2+2}{18}\right)^{7x+2} > \left(\frac{x^2+2}{18}\right)^{x^2+8}$, բ) $\left|\frac{5x-7}{8}\right|^{x^2+2} \le \left|\frac{5x-7}{8}\right|^{6x-3}$:

Կրկնության համար

➢80. Նավակը և լաստը միաժամանակ դուրս եկան նավահանգստից: Հոսանքի ուղղությամբ մեկ ժամ լողալուց հետո նավակը ետ շրջվեց և լողաց դեպի լաստը: Նավահանգստից դուրս գալուց որքա՞ն ժամանակ անց նավակը կհանդիպի լաստին:

➢81. Նավակը և լաստը միաժամանակ դուրս եկան նավահանգստից: Հոսանքին հակառակ երկու ժամ լողալուց հետո նավակը ետ շրջվեց և լողաց դեպի լաստը: Նավահանգստից դուրս գալուց որքա՞ն ժամանակ անց նավակը կհանդիպի լաստին:

➢82. Նավակը և լաստը միաժամանակ դուրս եկան նավահանգստից: Երբ լաստը գտնվում էր նավահանգստից 3կմ հեռավորության վրա, նավակը ետ շրջվեց և լողաց դեպի լաստը: Նավահանգստից ի՞նչ հեռավորության վրա նավակը կհանդիպի լաստին:

2րդ ԳԼՈՒԽ

Լոգարիթմական ֆունկցիա

§1. Լոգարիթմի սահմանումը

Նախորդ գլխում մենք տեսանք, որ $2^x = b$ հավասարումը կամայական դրական b-ի դեպքում ունի միակ արմատ: Որոշ b-երի համար մենք կարող ենք գրել, թե որն է այդ արմատը: Օրինակ, եթե $b = 8$, ապա հավասարման արմատն է՝ $x = 3$: Իսկ ինչպե՞ս է գրվում, օրինակ, $2^x = 7$ հավասարման արմատը, այսինքն՝ ի՞նչ աստիճան պետք է բարձրացնել 2 թիվը 7 ստանալու համար: Այս հարցին պատասխանելու համար ներմուծվում է լոգարիթմի հասկացությունը:

***b* թվի լոգարիթմ *a* հիմքով, որտեղ $a > 0$, $a \neq 1$, կոչվում է այն թիվը, որով պետք է աստիճան բարձրացնել *a* հիմքը *b* թիվը ստանալու համար:**

b թվի լոգարիթմը a հիմքով նշանակում են՝ $\log_a b$ (կարդացվում է՝ ***լոգարիթմ a հիմքով b***): Այլ խոսքերով՝ $\log_a b$ թիվը

$$a^x = b$$

հավասարման արմատն է, այսինքն՝

$$a^{\log_a b} = b \, : \qquad (1)$$

Մասնավորապես, վերը նշված $2^x = 7$ հավասարման լուծումն է՝ $x = \log_2 7$:

Հիշեցնենք, որ եթե $a > 0$ և $a \neq 1$, ապա $a^x = b$ հավասարումն արմատ չունի, երբ $b \leq 0$ և ունի միակ արմատ, երբ $b > 0$: Հետևաբար,

$\log_a b$ արտահայտությունը որոշված է այն և միայն այն դեպքում, երբ $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$:

(1) բանաձևը կոչվում է ***հիմնական լոգարիթմական նույնություն***: Այն ցույց է տալիս, որ

$$\log_a b = x \iff b = a^x \, : \qquad (2)$$

Այս համարժեքությունից անմիջականորեն հետևում են հետևյալ հավասարություն-ները՝

ա) $\log_a 1 = 0$, բ) $\log_a a = 1$, գ) $\log_a a^m = m$,

որտեղ m-ը կամայական թիվ է:

Եթե լոգարիթմի հիմքը 10 է, ապա $\log_{10} b$ գրելաձևի փոխարեն կրճատ գրում են՝ $\lg b$, իսկ 10 հիմքով լոգարիթմները անվանում են ***տասնորդական լոգարիթմներ***:

Օրինակ 1: ա) $\log_3 81 = 4$, քանի որ $81 = 3^4$,

բ) $\log_2 0{,}25 = -2$, քանի որ $0{,}25 = 2^{-2}$,

գ) $\lg 0{,}1 = -1$, քանի որ $0{,}1 = 10^{-1}$:

Օրինակ 2: Գտնենք $\log_{16} 128$-ը:

Նշանակենք $\log_{16} 128 = x$: Համաձայն (2) համարժեքության,

$$128 = 16^x,$$

որտեղից՝ $2^{4x} = 2^7$ և $x = 1{,}75$:

Պատասխան՝ $\log_{16} 128 = 1{,}75$:

Օրինակ 3: Գտնենք x-ը, եթե հայտնի է, որ

ա) $\log_3 x = 2$, բ) $\log_2 (x-1) = 4$, գ) $\log_{0,2} x = -2$:

Օգտվելով (2) համարժեքությունից, կստանանք՝

ա) $x = 3^2 = 9$,

բ) $x - 1 = 2^4$, որտեղից՝ $x = 17$,

գ) $x = (0{,}2)^{-2} = 25$:

Օրինակ 4: Հաշվենք $9^{-2\log_3 5}$ արտահայտության արժեքը:

Օգտվելով աստիճանի հատկություններից և (1) նույնությունից, ստանում ենք.

$$9^{-2\log_3 5} = 3^{-4\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-4} = 5^{-4} = \frac{1}{625}:$$

Հակացե՞լ եք դասը

1. Ինչպիսի՞ a և b թվերի համար է սահմանվում b թվի լոգարիթմը a հիմքով:
2. Սահմանեք $\log_a b$ թիվը:
3. Ո՞րն է հիմնական լոգարիթմական նույնությունը:
4. Ո՞րն է $3^x = 12$ հավասարման լուծումը:
5. Որո՞նք են տասնորդական լոգարիթմները:
6. Ինչի՞ է հավասար արտահայտության արժեքը. ա) $\log_a 1$, բ) $\log_a a$:
7. Ճշմարի՞տ է արդյոք հավասարությունը՝ ա) $\log_4 64 = 3$, բ) $\log_7 50 = 2$, գ) $\log_{0,2} 5 = -1$:

Առաջադրանքներ

Հաշվել արտահայտության արժեքը (83-86).

83. ա) $\log_3 81$, բ) $\log_2 16$, գ) $\log_{0,1} 1000$,

դ) $\lg 0{,}001$, ե) $\log_{\frac{1}{8}} 64$, զ) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{81}$:

84. ա) $\log_2 \sqrt[5]{4}$, բ) $\lg \frac{100}{\sqrt{10}}$, գ) $\log_5 25\sqrt[3]{5}$,

դ) $\log_{\frac{1}{7}} 49\sqrt{7}$, ե) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt[4]{36}}$, զ) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt[3]{81}}$:

85. ա) $5^{2\log_5 12}$, բ) $8^{4\log_8 3}$, գ) $7^{0,5\log_7 16}$,

դ) $9^{\log_3 8}$, ե) $100^{\lg 11}$, զ) $36^{2\log_6 2}$:

86. ա) $\log_4 8$, բ) $\log_9 27$, գ) $\log_{25} \frac{1}{125}$,

դ) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{8}$, ե) $\log_{\frac{1}{8}} 32$, զ) $\log_{\frac{1}{100}} 0{,}001$:

87. Լուծել հավասարումը.

ա) $8^x = 5$, բ) $(0{,}5)^x = 3$, գ) $10^{-x} = 6$,

դ) $2^{x+1} = 9$, ե) $7^{2x-1} = 13$, զ) $10^{3-x} = 7$:

88. Գտնել x թիվը, եթե

ա) $\log_6 x = 1$, բ) $\log_5 x = -1$, գ) $\log_{0,2} x = -2$,

դ) $\log_3(2x-1) = 2$, ե) $\log_2(x^2+7) = 5$, զ) $\log_{0,5} x^2 = 4$:

89. Գտնել արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը.

ա) $\log_8(x^2-9)$, բ) $\lg(1-x^2)$, գ) $\log_{0,5} \frac{x-2}{3+x}$,

➢դ) $\log_x(4-x^2)$, ➢ե) $\log_{9-x^2}(x-2)$, ➢զ) $\log_{2x-1}(5-x)$:

Կրկնության համար

➢**90.** Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը, արժեքների բազմությունը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

ա) $f(x) = 3\sin x\cos x$, բ) $f(x) = \sin x + \cos x$,

գ) $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$, դ) $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$:

➢**91.** Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի արմատ.

ա) $\cos x = \frac{a-1{,}5}{2-a}$, բ) $\sin x\cos x = \frac{3a-7}{a-1}$,

գ) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = a^2 - 3a + 2$, դ) $6\sin x + 8\cos x = a^2 - 6$:

§2. Լոգարիթմի հիմնական հատկությունները

Լոգարիթմ պարունակող արտահայտություններ ձևափոխելիս կարևոր դեր են խաղում հետևյալ նույնությունները.

Յանկացած $a>0$, $a\neq 1$ հիմքի և կամայական $b>0$, $c>0$ թվերի համար.

I. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$,

II. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,

III. $\log_a b^m = m\log_a b$, **որտեղ m-ը կամայական թիվ է:**

IV. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, եթե $c\neq 1$:

Ապացուցման համար օգտվում ենք հիմնական լոգարիթմական նույնությունից, համաձայն որի՝

$$a^{\log_a b} = b,\ \ a^{\log_a c} = c: \qquad (1)$$

Բազմապատկելով այս հավասարությունները, կստանանք.

$$a^{\log_a b + \log_a c} = bc,$$

որտեղից, նախորդ պարագրաֆի (2) համարժեքության համաձայն, հետևում է I հավասարությունը:

(1) հավասարություններից առաջինը բաժանելով երկրորդի վրա, կստանանք.

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c},$$

որը համարժեք է II հավասարությանը:

Ապացուցենք III հավասարությունը: Օգտվելով հիմնական լոգարիթմական նույնությունից և աստիճանի հատկություններից, ստանում ենք.

$$a^{m\log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^m = b^m,$$

որը համարժեք է III հավասարությանը:

Ապացուցենք IV նույնությունը, որը անվանում են մի հիմքով լոգարիթմից մեկ այլ հիմքով լոգարիթմի ***անցման բանաձև***: Նկատենք, որ համաձայն III հավասարության,

$$\log_a b\cdot\log_c a = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b,$$

որտեղից հետևում է IV բանաձևը:

Օրինակ 1: Հաշվենք $\dfrac{\log_3 40 - \log_3 10}{2\log_3 4}$ արտահայտության արժեքը:

Օգտվելով II-IV նույնություններից, ստանում ենք.

$$\frac{\log_3 40-\log_3 10}{2\log_3 4}=\frac{\log_3 4}{\log_3 16}=\log_{16}4=\log_{16}16^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}:$$

Պատասխան՝ $\frac{1}{2}$:

Տրված արտահայտությունը լոգարիթմել a հիմքով, նշանակում է հաշվել այդ արտահայտության լոգարիթմը a հիմքով:

Օրինակ 2: $\frac{9x^3\sqrt[5]{y^2}}{z^2}$ արտահայտությունը լոգարիթմենք 3 հիմքով:

Օգտվելով I-III նույնություններից, ստանում ենք.

$$\log_3\left(\frac{9x^3\sqrt[5]{y^2}}{z^2}\right)=\log_3 9+\log_3 x^3+\log_3\sqrt[5]{y^2}-\log_3 z^2=$$

$$=2+3\log_3 x+\frac{2}{5}\log_3 y-2\log_3 z:$$

Օրինակ 3: Հաշվենք $\log_{8\sqrt{0,5}}\left(16\cdot\sqrt[3]{0,25}\right)$ արտահայտության արժեքը:

Օգտվելով անցման բանաձևից, այնուհետև՝ I-III նույնություններից, ստանում ենք.

$$\log_{8\sqrt{0,5}}\left(16\cdot\sqrt[3]{0,25}\right)=\frac{\log_2\left(16\cdot\sqrt[3]{0,25}\right)}{\log_2 8\sqrt{0,5}}=$$

$$=\frac{\log_2 16+\log_2\sqrt[3]{0,25}}{\log_2 8+\log_2\sqrt{0,5}}=\frac{\log_2 2^4+\log_2 2^{-\frac{2}{3}}}{\log_2 2^3+\log_2 2^{-\frac{1}{2}}}=\frac{4-\frac{2}{3}}{3-\frac{1}{2}}=1\frac{1}{3}:$$

Պատասխան՝ $1\frac{1}{3}$:

Լոգարիթմական արտահայտություններ ձևափոխելիս հաճախ օգտակար են լինում նաև հետևյալ նույնությունները.

$$\text{ա) } \log_{a^p} b=\frac{1}{p}\log_a b\,, \quad \text{բ) } \log_a b=\log_{a^p} b^p\,, \quad \text{գ) } \log_a b=\frac{1}{\log_b a}\,, \qquad (2)$$

որտեղ a-ն, b-ն դրական, իսկ p-ն՝ կամայական թվեր են, ընդ որում, $a\neq 1$, $p\neq 0$, իսկ գ)-ում նաև $b\neq 1$:

Առաջին նույնությունը հեշտությամբ ապացուցվում է անցման բանաձևի և III հատկության օգնությամբ՝

$$\log_{a^p} b=\frac{\log_a b}{\log_a a^p}=\frac{1}{p}\log_a b:$$

բ) հատկությունը հետևում է ա)-ից և III-ից, իսկ գ) հատկությունը՝ անցման բանաձևից:

Օրինակ 4: Գտնենք $\log_a b$-ն, եթե հայտնի է, որ $\log_{\sqrt{b}} a^2b^3 = 5$:
Օգտվելով լոգարիթմի հիմնական հատկություններից և (2,ա)-ից, ստանում ենք.

$$\log_{\sqrt{b}} a^2b^3 = 2\left(\log_b a^2 + \log_b b^3\right) = 4\log_b a + 6 = \frac{4}{\log_a b} + 6:$$

Հետևաբար՝ $\frac{4}{\log_a b} + 6 = 5$, որտեղից՝ $\log_a b = -4$:

Պատասխան՝ -4:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչի՞ է հավասար արտադրյալի լոգարիթմը:
2. Ինչի՞ է հավասար քանորդի լոգարիթմը:
3. Գրեք III նույնությունը:
4. Ինչպե՞ս են մի հիմքով լոգարիթմից անցնում մեկ այլ հիմքով լոգարիթմի:
5. Գրեք (2) նույնությունները:

Առաջադրանքներ

Հաշվել արտահայտության արժեքը (92-95).

92. ա) $\lg 25 + \lg 4$, բ) $\log_{\frac{1}{6}} 4 + \log_{\frac{1}{6}} 9$, գ) $3\log_6 3 + \log_6 8$,

դ) $\log_5 75 - \log_5 3$, ե) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$, զ) $2\log_2 6 - \log_2 9$:

93. ա) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$, բ) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$,

գ) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$, դ) $2\log_{\frac{1}{5}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{5}} 400 - 4\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[4]{45}$:

94. ա) $\log_5\left(7 + 2\sqrt{6}\right) + \log_5\left(7 - 2\sqrt{6}\right)$, բ) $\log_{1,5}\left(3 + \sqrt{6}\right) - \log_{1,5}\left(2 + \sqrt{6}\right)$:

95. ա) $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$, բ) $\frac{\lg 8 + \lg 18}{\lg 4 + \lg 3}$,

գ) $\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$, դ) $\frac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150}$,

96. Լոգարիթմել 10 հիմքով ($a > 0,\ b > 0,\ c > 0$).

ա) $100\sqrt{a^3b^2c}$, բ) $0,001a^4\sqrt{b^{-3}c^4}$, գ) $10^3a^2b^{\frac{1}{2}}c^{-3}$,

դ) $\frac{a^5}{0,1c^2\sqrt{b}}$, ե) $\frac{0,01b^3}{\sqrt[3]{b^2c^{0,5}}}$, զ) $\frac{0,1\sqrt[7]{b^3}}{c^3a^2}$:

* **97.** Ապացուցել, որ

ա) $(2-\log_3 225)\cdot(2-\log_5 225)=4$, բ) $(2-\log_{\sqrt{2}} 10)\cdot(2-\log_{\sqrt{5}} 10)=4$

գ) $\sqrt{4-\log_2 3\cdot\log_2 5\frac{1}{3}}+\sqrt{1-\log_2 3\cdot\log_2 1\frac{1}{3}}=1$:

➢**98.** Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$, բ) $b^{\log_a c}=c^{\log_a b}$,

գ) $\log_{ab} c=\dfrac{\log_a c\cdot\log_b c}{\log_a c+\log_b c}$, դ) $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d$:

Հաշվել արտահայտության արժեքը (99-102).

99. ա) $\log_2 7\cdot\log_7 0{,}25$, բ) $\log_5 11\cdot\log_{11} 0{,}04$,

գ) $\log_3 4\cdot\log_{16} 9$, դ) $\log_{27} 125\cdot\log_{\sqrt{5}} 3$:

100. ա) $\log_7 9\cdot\log_{\sqrt{3}}\sqrt{7}$, բ) $\log_{25} 81\cdot\log_{\sqrt{3}} 125$,

գ) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8$:

101. ա) $10^{1-2\lg 5}$, բ) $3^{\log_3 6-2}$, գ) $25^{1+\log_5 2}$,

դ) $2^{\log_8 27+3}$, ե) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{49} 9-1}$, զ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{0,5} 6-2}$

➢**102.** ա) $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$, բ) $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$,

գ) $\left(5^{\log_{25} 9}+3^{\log_9 25}\right)^{\log_2 5}$, դ) $\left(25^{\log_{0,2} 6}+4^{\log_{0,5} 6}\right)^{\frac{1}{\lg 18}}$:

* **103.** Օգտվելով 98-րդ առաջադրանքի բ) նույնությունից, ապացուցել, որ

ա) $\left(8^{\lg 70}-7^{\lg 80}\right)^{\log_2 10}=343$, բ) $\left(3^{\lg 200}-2^{\lg 3000}\right)^{\frac{1}{\lg\sqrt{2}}}=9$,

գ) $\left(3^{\log_5 50}-2^{\log_5 375}\right)^{\log_3 25}=4$, դ) $\left(4^{\log_5\sqrt{3}}+9^{\log_5\sqrt{2}}\right)^{\log_{15} 25}=4$,

ե) $\dfrac{12^{\log_2 5}-20^{\log_2 3}}{6^{\log_2 5}+10^{\log_2 3}}=2$, զ) $\left(4^{\log_5 15}-3^{\log_5 20}\right)^{\log_2 5}=9$:

* **104.** Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\sqrt{4\lg 2+\lg^2 5}+\sqrt{4\lg 5+\lg^2 2}=3$,

բ) $\sqrt{4\log_6 2+\log_6^2 3}+\sqrt{\log_6 1{,}5+\log_6^2 2}=2$:

➢**105.** Պարզեցնել.

ա) $\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}}+1\right)^{\frac{1}{2}}$, բ) $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$, գ) $\dfrac{\log_a b - \log_{\sqrt{a}/b^3}\sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b - \log_{a/b^6} b} : \log_a\left(a^3 b^{-12}\right)$:

106. Գտնել $\log_a b$ -ն, եթե

ա) $\log_a a^3 b^2 = 7$, բ) $\log_{\sqrt{a}} a^2\sqrt{b} = 9$, գ) $\log_b a^4 b^6 = 10$,

դ) $\log_a \dfrac{a^5}{b^4} = 6$, ե) $\log_{\sqrt{a}} \dfrac{b\sqrt{b}}{a^4} = 1$, զ) $\log_b \dfrac{b^{10}}{a^5} = 5$:

107. Ո՞ր x-երի համար է ճշմարիտ հավասարությունը ($a > 0,\ a \neq 1$).

ա) $\log_a x^2 = 2\log_a x$, բ) $\log_a x^2 = 2\log_a(-x)$,

գ) $\log_a x^2 = 2\log_a |x|$, դ) $\log_a x^3 = 3\log_a x$:

108. Ինչպիսի՞ x-երի և y-ների համար է ճշմարիտ հավասարությունը ($a > 0,\ a \neq 1$).

ա) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, բ) $\log_a xy = \log_a(-x) + \log_a(-y)$,

գ) $\log_a(-xy) = \log_a x + \log_a(-y)$:

109. Դիցուք (b_n)-ը q հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիա է ($b_n > 0$), և

$$a_n = \lg b_n, \quad n = 1,2,\ldots:$$

ա) Գտնել $a_2 - a_1$, $a_9 - a_8$, $a_{42} - a_{41}$ տարբերությունները:

բ) Գտնել $a_{n+1} - a_n$ տարբերությունը, որտեղ $n = 1,2,\ldots$:

գ) Ապացուցել, որ (a_n) հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է և գտնել նրա տարբերությունը:

110. Ապացուցել, որ 1-ից տարբեր կամայական դրական a և b թվերի համար

$$\log_a^2 b + \log_b^2 a \geq 2:$$

Կրկնության համար

111. Գտնել նշված արտահայտության արժեքը, որտեղ x_1-ը և x_2-ը տրված հավասարման արմատներն են.

ա) $2x^2 - 7x + 2 = 0,\quad 4x_1^2 + 4x_2^2$, բ) $3x^2 - 6x - 2 = 0,\quad x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 \cdot x_2^2$,

գ) $x^2 - 4x - 3 = 0,\quad \dfrac{3x_1}{x_2} + \dfrac{3x_2}{x_1}$:

112. Գտնել p-ի արժեքը, որի դեպքում հավասարման x_1 և x_2 արմատները բավարարում են տրված պայմանին.

ա) $x^2 - 12x + p = 0,\quad x_2 = 3x_1$, բ) $x^2 + px + 4 = 0,\quad x_2 - x_1 = 3$,

գ) $x^2 - 2x + p = 0,\quad 7x_2 - 4x_1 = 47$:

§3. Լոգարիթմական ֆունկցիա

Լոգարիթմական ֆունկցիա կոչվում է

$$f(x)=\log_a x$$

բանաձևով տրված ֆունկցիան, որտեղ a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է:

Նշենք լոգարիթմական ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները:

1) ***Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը դրական կիսաառանցքն է՝*** $D(f)=(0,\infty)$:

2) ***Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն ամբողջ թվային առանցքն է՝*** $E(f)=(-\infty,\infty)$:

Իրոք, կամայական y արժեք ֆունկցիան ընդունում է $x=a^y$ կետում, քանի որ $\log_a a^y=y$: Ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է առաջին և չորրորդ քառորդներում:

3) ***Ֆունկցիան մոնոտոն է իր որոշման տիրույթում: Ընդ որում, այն աճող է, եթե $a>1$ և նվազող՝ եթե $0<a<1$:***

Ապացուցենք, որ $a>1$ դեպքում կամայական x_1 և x_2 դրական թվերի համար $x_1<x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ

$$\log_a x_1<\log_a x_2 : \qquad (1)$$

Ենթադրենք հակառակը՝

$$x_1<x_2 \text{, բայց } \log_a x_1\ge\log_a x_2 : \qquad (2)$$

Հաշվի առնելով, որ $y=a^x$ ֆունկցիան $a>1$ դեպքում աճող է, կստանանք

$$a^{\log_a x_1}\ge a^{\log_a x_2}$$

անհավասարությունը, որտեղից, հիմնական լոգարիթմական նույնության համաձայն, հետևում է, որ

$$x_1\ge x_2 :$$

Սա հակասում է $x_1<x_2$ պայմանին, հետևաբար, մեր ենթադրությունը, թե տեղի ունի (2)-ը, սխալ է, այսինքն, տեղի ունի (1)-ը:

Նման ձևով, օգտվելով մեկից փոքր հիմքով ցուցչային ֆունկցիայի նվազող լինելուց, կապացուցենք, որ $0<a<1$ դեպքում լոգարիթմական ֆունկցիան նվազող է:

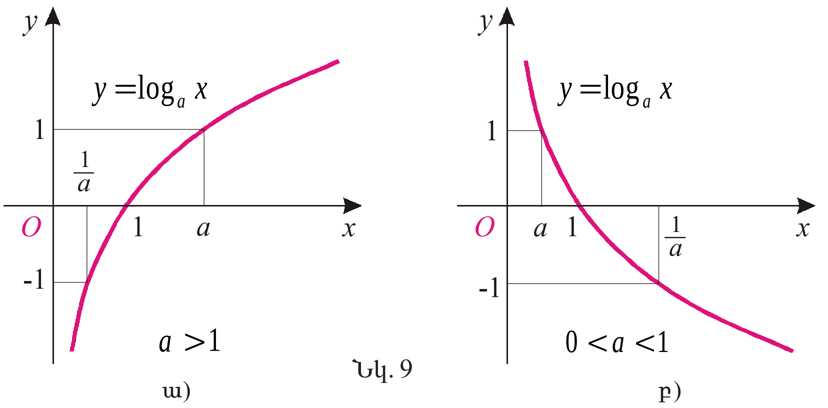
4) ***Ֆունկցիան 0 արժեքն ընդունում է $x=1$ կետում:***

Այստեղից և ֆունկցիայի մոնոտոնությունից (տե՛ս 3))հետևում է.

5) ա) ***$a>1$ դեպքում ֆունկցիան բացասական է $(0,1)$ և դրական՝ $(1,\infty)$ միջակայքերում,***

բ) ***$0<a<1$ դեպքում ֆունկցիան դրական է $(0,1)$ և բացասական՝ $(1,\infty)$ միջակայքերում:***

Լոգարիթմական ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկը բերված է նկ. 9-ում :



Նկ. 9

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=\log_5\left(x^2-5x+4\right)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

Քանի որ լոգարիթմական ֆունկցիայի որոշման տիրույթը դրական թվերի բազմությունն է, ուստի $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կլինի

$$x^2-5x+4>0$$

անհավասարումը բավարարող x-երի բազմությունը: Լուծելով այդ անհավասարումը, ստանում ենք՝ $D(f)=(-\infty,1)\cup(4,\infty)$:

Օրինակ 2: Պարզենք $f(x)=\log_{a^2-6a+9}x$ ֆունկցիայի աճող կամ նվազող լինելը՝ կախված a պարամետրից:

Գիտենք, որ 1-ից մեծ հիմքով լոգարիթմական ֆունկցիան աճող է, իսկ մեկից փոքր դրական հիմքով լոգարիթմական ֆունկցիան՝ նվազող: Ուստի տրված $f(x)$ ֆունկցիան կլինի աճող, եթե

$$a^2-6a+9>1$$

և նվազող, եթե

$$\begin{cases} a^2-6a+9<1 \\ a^2-6a+9>0 \end{cases} :$$

Լուծելով ստացված քառակուսային անհավասարումը և անհավասարումների համակարգը, ստանում ենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան՝

ա) աճող է, եթե $a\in(-\infty,2)\cup(4,\infty)$,

բ) նվազող է, եթե $a\in(2,3)\cup(3,4)$:

a պարամետրի մնացած արժեքների դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան որոշված չէ:

Օրինակ 3: Համեմատենք $4\log_{0,7}3$ և $3\log_{0,7}4$ թվերը:

Լոգարիթմի III հիմնական հատկությունից հետևում է, որ

$$4\log_{0,7}3=\log_{0,7}3^4=\log_{0,7}81,\quad 3\log_{0,7}4=\log_{0,7}4^3=\log_{0,7}64 :$$

Քանի որ $0{,}7 < 1$, ուրեմն $y = \log_{0,7} x$ լոգարիթմական ֆունկցիան նվազող է: Հաշվի առնելով, որ $81 > 64$, ստանում ենք՝

$$\log_{0,7} 81 < \log_{0,7} 64,$$

այսինքն՝

$$4\log_{0,7} 3 < 3\log_{0,7} 4:$$

Օրինակ 4: Գտնենք $f(x) = \log_3(\sqrt{x} + 3)$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը և փոքրագույն արժեքը:

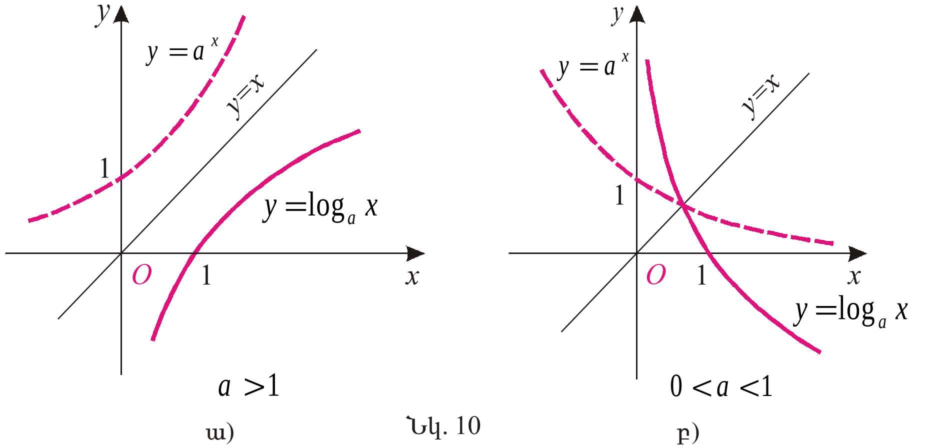
Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $[0, \infty)$ միջակայքն է, որին պատկանող կամայական x-ի համար՝ $\sqrt{x} + 3 \geq 3$: Քանի որ լոգարիթմի հիմքը մեծ է մեկից, ուրեմն՝

$$f(x) = \log_3(\sqrt{x} + 3) \geq \log_3 3 = 1:$$

Հետևաբար, ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը 1-ն է, որը ֆունկցիան ընդունում է $x = 0$ կետում: Արժեքների բազմությունը կլինի $[1, \infty)$ միջակայքը, քանի որ լոգարիթմատակ արտահայտությունը կարող է լինել 3-ից մեծ կամայական թիվ:

Լոգարիթմի սահմանման համաձայն, $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$: Այս համարժեքությունը ցույց է տալիս, որ $\varphi(x) = a^x$ ցուցչային ֆունկցիան $f(x) = \log_a x$ լոգարիթմական ֆունկցիայի հակադարձն է: Իսկ փոխհակադարձ ֆունկցիաների գրաֆիկները, ինչպես գիտենք, համաչափ են $y = x$ ուղղի նկատմամբ:

Միևնույն հիմքով լոգարիթմական և ցուցչային ֆունկցիաները փոխհակադարձ ֆունկցիաներ են: Նրանց գրաֆիկները համաչափ են $y = x$ ուղղի նկատմամբ (նկ. 10):



ա) Նկ. 10 բ)

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում լոգարիթմական ֆունկցիա:
2. Ո՞րն է լոգարիթմական ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
3. Ո՞րն է լոգարիթմական ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:
4. Ո՞ր քառորդներում է գտնվում լոգարիթմական ֆունկցիայի գրաֆիկը:
5. Ե՞րբ է լոգարիթմական ֆունկցիան աճող և ե՞րբ՝ նվազող:
6. Որո՞նք են լոգարիթմական ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը:
7. Կառուցել $y=\log_2 x$ և $y=\log_{0,5} x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:
8. Ի՞նչ կապ կա միևնույն հիմքով լոգարիթմական և ցուցչային ֆունկցիաների միջև:

Առաջադրանքներ

113. Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա) $y=\log_3(5x-6)$, բ) $y=\log_{0,5}(4-2x)$, գ) $y=\log_3(x^2-7)$,

դ) $y=\lg(x^2-2x+1)$, ե) $y=\log_{\frac{4}{7}}\dfrac{2x+5}{1-x}$, զ) $y=\log_9\dfrac{x-3}{2-4x}$,

է) $y=\lg(1-\sqrt{x})$, ը) $y=\log_{0,9}|x|$, թ) $y=\log_7(|x|-5)$:

Բաղդատել թվերը (114-115).

114. ա) $\log_3 7$ և $\log_3 5$, բ) $\lg 0{,}7$ և $\lg 0{,}71$, գ) $\log_{\frac{1}{3}} 6$ և $\log_{\frac{1}{3}} 4$,

դ) $\log_{\frac{5}{6}}\dfrac{3}{4}$ և $\log_{\frac{5}{6}}\dfrac{4}{5}$, ե) $\log_5 3$ և $\log_5\dfrac{10}{3}$, զ) $\lg\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ և $\lg\dfrac{\sqrt{6}}{2}$:

115. ա) $\log_{0,4}\sqrt{3}$ և 0, բ) $\log_4\sqrt[3]{3}$ և 0, գ) $\log_{\sqrt{3}} 2$ և 1,

դ) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{2}{3}$ և 1, ե) $3\log_{\frac{2}{5}} 2$ և $\log_{\frac{2}{5}} 7$, զ) $3\lg 5$ և $7\lg 2$:

* **116.** Ցույց տալ, որ

ա) $\log_3 11<\log_2 5$, բ) $\log_2 7\cdot\log_2 9<9$,

գ) $\log_8 18<\log_4 7<\log_8 19$, դ) $\log_3^2 10+\log_3^2 8{,}1>8$,

ե) $2<\log_2 5+\log_5 2<3$, զ) $2<\sqrt{\log_2 3}+\sqrt{\log_3 2}<\sqrt{5}$:

117. Պարզել ֆունկցիայի աճող կամ նվազող լինելը.

ա) $f(x)=\log_{3,2} x$, բ) $f(x)=\log_{0,01} x$, գ) $f(x)=\lg x$:

118. Պարզել, թե a-ի ո՞ր արժեքների դեպքում է ֆունկցիան աճող և որոնց դեպքում՝ նվազող.

ա) $f(x)=\log_a x$, բ) $f(x)=\log_{a-1} x$, գ) $f(x)=\log_{5-2a} x$:

119. Որոշել արտահայտության նշանը.

ա) $\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)$, բ) $\lg\left(\sqrt{17}-4\right)$, գ) $\log_{0,9} 0,99$, դ) $\log_{0,1} 1,01$:

➢**120.** Գտնել ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը.

ա) $y=\log_2(x-2)$, բ) $y=\log_{0,4}(2x-3)$, գ) $y=\lg(x^2-3)$,

դ) $y=\log_{0,1}(x^2-9)$, ե) $y=\log_{0,2}(|x|-3)$, զ) $y=\lg(|x|-1)$:

121. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y=\log_2(x-4)$, բ) $y=\log_{0,5}(x+3)$, գ) $y=\log_3 x+2$:

➢**122.** Գտնել ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը և փոքրագույն արժեքը՝

ա) $y=\log_2\left(\sqrt{x}+4\right)$, բ) $y=\log_{0,7}\left(1-x^2\right)$, գ) $y=\lg\left(|x|+0,1\right)$:

➢**123.** Գտնել ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը և մեծագույն արժեքը՝

ա) $y=\log_{0,2}\left(\sqrt{x}+5\right)$, բ) $y=\log_6\left(6-x^2\right)$, գ) $y=\lg\left(10-|x|\right)$:

➢**124.** Գտնել արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը.

ա) $\log_{x-1}(5-x)$, բ) $\log_{2-x}(3x+9)$, գ) $\log_x(x^2-2x)$,

դ) $\log_{3-x}(16-x^2)$, ե) $\log_x \dfrac{2x+8}{7-x}$, զ) $\log_{x-4}\dfrac{x-2}{5x+1}$,

է) $\log_{x-2}(7-|x|)$, ը) $\log_{8-2x}(|x|-1)$, թ) $\log_x \sqrt{2-x}$:

➢**125.** Ցույց տալ, որ հավասարման լուծումը տրված թիվն է.

ա) $\log_2 x=1-x,\quad x=1$, բ) $\log_{0,5} x=x-6,\quad x=4$,

գ) $\log_{\sqrt{3}} x=11-x^2,\quad x=3$, դ) $\log_{\frac{1}{3}}(x+3)=5^x-2,\ x=0$:

* **126.** Ցույց տալ, որ հավասարումն արմատ չունի.

ա) $\log_2\left(x^2-6x+17\right)+\log_3\left(x^2-8x+25\right)=5$;

բ) $\log_6\left(x^2-10x+32\right)+\log_7\left(x^2-10x+31\right)=2$:

➢**127.** Ապացուցել, որ $\log_2 x$ և $\log_{0,5} x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են աբսցիսների առանցքի նկատմամբ:

Կրկնության համար

➢**128.** Ապացուցել, որ.

ա) Եթե $x^2-4x+3<0$, ապա $\sin x>0$,

բ) Եթե $x^2-6x+8<0$, ապա $\cos x<0$,

գ) Եթե $2x^2-15x+28<0$, ապա $\operatorname{tg} x>0$:

➢**129.** Ապացուցել, որ

ա) $\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, բ) $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, գ) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$:

§4. Լոգարիթմական հավասարումներ

Դիտարկենք ***պարզագույն լոգարիթմական հավասարումը***՝

$$\log_a x = b, \quad (1)$$

որտեղ a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է: Ինչպես գիտեք, այն համարժեք է

$$a^b = x$$

հավասարմանը, այսինքն (1) հավասարման լուծումն է՝ $x = a^b$:

Եթե (1) հավասարման մեջ x-ի փոխարեն գրված է փոփոխական պարունակող որևէ արտահայտություն, ապա հավասարումը լուծվում է նման ձևով:

Օրինակ 1: Լուծենք հավասարումը.

$$\log_3(x^2 - 7x + 21) = 2: \quad (2)$$

Այս հավասարումը համարժեք է

$$x^2 - 7x + 21 = 3^2$$

քառակուսային հավասարմանը, որի արմատներն են՝ $x_1 = 3$, $x_2 = 4$:

Պատասխան՝ $3; 4$:

Լոգարիթմական հավասարումներ լուծելիս հաճախ է օգտագործվում հետևյալ պնդումը.

եթե a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է և $u > 0$, $v > 0$, ապա

$$\log_a u = \log_a v \quad (3)$$

հավասարությունը համարժեք է $u = v$ հավասարությանը:

Իրոք, լոգարիթմի հիմնական հատկությունների համաձայն, (3)-ից հետևում է, որ $u = a^{\log_a u} = a^{\log_a v} = v$: Մյուս կողմից, ակնհայտ է, որ դրական թվերի համար $u = v$ հավասարությունից հետևում է (3)-ը:

Օրինակ 2: Լուծենք հավասարումը.

$$\log_5(x^2 + 3x) = \log_5(x + 3): \quad (4)$$

Հավասարման ԹԱԲ-ն այն x-երի բազմությունն է, որոնք բավարարում են

$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ x^2 + 3x > 0 \end{cases} \quad (5)$$

համակարգին: Այդպիսի x-երի համար (4) հավասարումը համարժեք է

$$x^2 + 3x = x + 3 \quad (6)$$

հավասարմանը, որի արմատներն են $x = -3$ և $x = 1$: Ստուգելով, համոզվում ենք, որ $x = -3$ արմատը չի բավարարում (5) համակարգին, իսկ $x = 1$ արմատը բավարարում է: Նկատենք, որ համաձայն (6) հավասարության, բավական է ստուգել համակարգի անհավասարումներից մեկը (ավելի պարզը):

Պատասխան՝ 1:

Եթե լոգարիթմական հավասարման աջ և ձախ մասերը միևնույն հիմքով լոգարիթմների գումարներ (տարբերություններ) են, ապա այն բերվում է (2) կամ (4) տեսքի հավասարման երկրորդ պարագրաֆում բերված I-II հատկությունների օգնությամբ:

Պետք է նշել, որ լոգարիթմի I-III հատկությունները նույնական ձևափոխություններ չեն, քանի որ նրանց աջ և ձախ մասերի թույլատրելի արժեքների բազմությունները տարբեր են: Դա նշանակում է, որ տրված լոգարիթմական հավասարումն այդ հատկությունների օգնությամբ պարզեցնելիս մենք, հիմնականում, ստանում ենք հավասարում, որը հանդիսանում է տրված հավասարման հետևանքը, բայց կարող է համարժեք չլինել նրան: Այսինքն՝ ստացված արմատների մեջ կարող են լինել այնպիսիք, որոնք չեն բավարարում սկզբնական հավասարմանը:

Հետևաբար, նշված հատկությունների կիրառմամբ պարզեցված հավասարման արմատները գտնելուց հետո ***անհրաժեշտ է ստուգել***, որ հավասարման արմատները պատկանեն տրված հավասարման ԹԱԲ-ին:

Օրինակ 3: Լուծել հավասարումը.

$$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3:$$

Հավասարման ԹԱԲ-ն այն x-երի բազմությունն է, որոնց համար $x+1>0$ և $x+3>0$: Այդպիսի x-երի համար հավասարումը համարժեք է

$$\log_2(x+1)(x+3)=3$$

հավասարմանը, որտեղից՝

$$(x+1)(x+3)=8:$$

Լուծելով այս քառակուսային հավասարումը, ստանում ենք՝ $x_1=-5$, $x_2=1$: Ստուգելով, համոզվում ենք, որ առաջին արմատը չի պատկանում սկզբնական հավասարման ԹԱԲ-ին, իսկ երկրորդը պատկանում է:

Պատասխան՝ 1:

Օրինակ 4: Լուծել հավասարումը.

$$\log_3^2 x^2+8\log_3(-x)-12=0:$$

Հավասարման ձախ մասը որոշված է բացասական x-երի համար: Ընդ որում, եթե $x<0$, ապա

$$\log_3 x^2=2\log_3|x|=2\log_3(-x):$$

Ուստի տրված հավասարումը համարժեք է

$$4\log_3^2(-x)+8\log_3(-x)-12=0$$

հավասարմանը, որը $t=\log_3(-x)$ նշանակումով բերվում է

$$t^2+2t-3=0$$

քառակուսային հավասարմանը: Վերջինիս արմատներն են` $t_1=-3$, $t_2=1$: Լուծելով $\log_3(-x)=-3$ և $\log_3(-x)=1$ հավասարումները, ստանում ենք` $x_1=-3^{-3}=-\frac{1}{27}$, $x_2=-3$:

Պատասխան` $-3;\ -\frac{1}{27}$:

Այն լոգարիթմական հավասարումները, որոնք պարունակում են տարբեր հիմքերով լոգարիթմական արտահայտություններ, սովորաբար լուծվում են այդ արտահայտությունները միևնույն հիմքի բերելով:

Օրինակ 5: Լուծել հավասարումը.

$$\log_6 x^2+\log_x 36=1:$$

Անցնելով 6 հիմքի, ստանում ենք

$$\log_6 x^2+\frac{\log_6 36}{\log_6 x}=1$$

հավասարումը, որտեղից`

$$2\log_6 x+\frac{2}{\log_6 x}=1.$$

Նշանակելով $\log_6 x=t$, կստանանք`

$$2t+\frac{2}{t}=1\Rightarrow 2t^2-t+2=0\Rightarrow t_1=2,\quad t_2=\frac{1}{2}$$

Լուծելով $\log_6 x=2$ և $\log_6 x=0{,}5$ հավասարումները, կստանանք` $x_1=36$, $x_2=\sqrt{6}$:

Պատասխան` $36;\sqrt{6}$:

Օրինակ 6: Լուծել հավասարումը.

$$x^{\lg x+5}=10^{15+3\lg x}:$$

Հավասարման ԹԱԲ-ը $(0,\infty)$ միջակայքն է, որտեղ նրա աջ և ձախ մասերը դրական են: Հետևաբար, լոգարիթմելով հավասարման աջ և ձախ մասերը 10 հիմքով, կստանանք տրվածին համարժեք հետևյալ հավասարումը`

$$(\lg x+5)\lg x=15+3\lg x:$$

Նշանակելով $t=\lg x$ և լուծելով ստացված քառակուսային հավասարումը, ստանում ենք` $\lg x=-5$ կամ $\lg x=3$, որտեղից` $x=10^{-5}$ կամ $x=1000$:

Պատասխան` 10^{-5}; 1000:

Օրինակ 7: Լուծել համակարգը.

$$\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81\\ 2\lg(x+y)-\lg x=3\lg 2\end{cases}:$$

Թույլատրելի են x-ի և y-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $x+y>0$, $x>0$:

Օգտվելով աստիճանի և լոգարիթմի հատկություններից, ստանում ենք՝

$$\begin{cases} 3^{2x+y}=3^4 \\ \lg(x+y)^2=\lg 9x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=4 \\ (x+y)^2=9x \end{cases} :$$

Առաջին հավասարումից գտնելով $y=4-2x$ և տեղադրելով երկրորդ հավասարման մեջ, կստանանք

$$(4-x)^2=9x$$

քառակուսային հավասարումը, որտեղից գտնում ենք՝ $x_1=1$, $x_2=16$, այնուհետև՝ $y_1=2$, $y_2=-28$: Հեշտ է տեսնել, որ $(16;-28)$ թվազույգը չի բավարարում $x+y>0$ պայմանին:

Պատասխան՝ $(1;2)$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է պարզագույն լոգարիթմական հավասարման լուծումը:
2. Ինչպե՞ս են լուծում լոգարիթմական հավասարումները, որոնց աջ և ձախ մասերը միևնույն հիմքով լոգարիթմների գումարներ են:
3. Ե՞րբ կարող են ստացվել կողմնակի արմատներ լոգարիթմական հավասարումը լուծելիս:
4. Ինչպե՞ս են լուծվում լոգարիթմական հավասարումները, որոնք պարունակում են տարբեր հիմքերով լոգարիթմական արտահայտություններ:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (130-146).

130. ա) $\log_7(3x-29)=2$, բ) $\lg(2x-7)=-1$,

գ) $\log_{0,7}(8x-23)=0$, դ) $\log_{0,2}(5x+10)=-2$:

131. ա) $\log_3(x^2-2x+19)=3$, բ) $\log_2(7x^2+8x+2)=0$,

գ) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+7x+3)=-4$, դ) $\log_{\frac{1}{4}}(3x^2+4x-4)+2=0$:

132. ա) $\log_3(x-1)=\log_3 5+\log_3 2$, բ) $\lg(2x-5)=2\lg 3+1$,

գ) $\log_5(x+4)=3\log_5 2+\log_5 3$, դ) $\log_{\frac{1}{5}}(5x-7)+1=2\log_{\frac{1}{5}} 6$:

133. ա) $\log_4(5x+3)=\log_4(7x+5)$, բ) $\log_7(6x-1)=\log_7(4x+9)$,

գ) $\log_{\sqrt{10}}(x+1)=\lg(3x^2+9x+1)$, ➢դ) $\lg(x^2+2x-7)^2=2\lg(x-1)$:

134. ա) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$, բ) $\log_9(x+1)+\log_9(x-1)=0$,

գ) $2\log_2(x-5)+\log_{\sqrt{2}}(x+2)=6$, դ) $3\lg(x-\sqrt{3})+\lg(x+\sqrt{3})^3=0$:

➢ **135.** ա) $\log_{\frac{1}{3}} x+2\log_{\frac{1}{9}}(x+8)=\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)-2$,

բ) $\log_2(x-3)+\log_8 x^3+\log_{0,5}(2x-5)=1$,

գ) $2\log_{25}(2x+5)-\log_{0,2}(x-1)=\log_{\sqrt{5}}(4x-5)$:

➢ **136.** ա) $\dfrac{1}{\lg 10x}+\dfrac{6}{\lg x+5}=1$, բ) $\dfrac{1}{5-\lg(x-1)}+\dfrac{2}{\lg 10(x-1)}=1$,

գ) $\dfrac{1}{\log_2 16x}+\dfrac{1}{1-\log_4 x}=1$, դ) $\dfrac{5}{\lg 100x}-\dfrac{1}{\log_{0,1} x+6}=1$:

137. ա) $\log_3^2 x-2\log_3 x-3=0$, բ) $\lg^2(x-1)-2\lg(x-1)+1=0$,

գ) $3\log_6^2 x-4\log_6 36x+1=0$, դ) $4\log_4^2 x-2\log_2 x+1=0$:

➢ **138.** ա) $\lg(10x^2)\cdot\lg(100x)=9$, բ) $\lg^2(10x^2)+\lg^2(0,1x)=9$,

գ) $\log_3(3x^2)\cdot\log_3\dfrac{x^3}{9}=20$, դ) $\log_2(2x)\cdot\log_2\dfrac{x}{4}=4$:

➢ **139.** ա) $3\log_5^2 x^2+2\log_5 5x-4=0$, բ) $8\lg^2\sqrt{x-1}+3\lg\dfrac{x-1}{100}-3=0$,

գ) $\log_2^2(-x)-\log_2 x^2=3$, դ) $2\lg(2-x)^2-\lg^2(x-2)=4$:

➢ **140.** ա) $\log_{16}(4x+5)\cdot\log_x 4=1$, բ) $\log_9(3x+4)\cdot\log_x 3=1$,

գ) $\log_x 81x^2\cdot\log_9\sqrt{x}=3$, դ) $\log_{\sqrt{x}}\dfrac{x^3}{32}\cdot\log_{16} x=2$:

141. ա) $3^{4x+2}=5$, բ) $10^{2x+3}=2$, գ) $4^{5x-1}=6$,

դ) $2^{10x-5}=7$, ե) $(0,1)^{8x+11}=3$, զ) $(0,2)^{4-3x}=9$:

➢ **142.** ա) $x^{\log_3 x-3}=81$, բ) $x^{\lg x-1}=100$, գ) $(8x)^{5-2\log_2 x}=\dfrac{1}{64}$,

դ) $x^{\log_4 x-2}=8^{\log_4 x-1}$, ե) $x^{\log_5 x}=125x^2$, զ) $(9x)^{\log_3 x-2}=x^3$:

* **143.** ա) $5^{\lg^2 x-\lg x}=7^{\lg(0,1x)}$, բ) $3^{\log_2^2 x+\log_2 x^2}=5^{\log_2(4x)}$:

➢ **144.** ա) $10\cdot 4^{\log_2 x}-24\cdot 9^{\log_3\sqrt{x}}=x^3$, բ) $7^{\log_{49}(x+1)}=5^{\log_{125}(3x-1)}$,

գ) $8^{\log_2 x}+6\cdot 5^{\log_{0,2}\frac{1}{x}}=5\cdot 9^{\log_3 x}$, դ) $3^{\log_9 x}-3^{\log_{27} x}=2^{1+\log_8\sqrt{x}}$:

➢ **145.** ա) $\lg(3^{x+1}-2)+\lg(3^{x+1}+2)=\lg 5$,

բ) $(1-x)\log_3 2+\log_3(4^x+2)=2$,

գ) $\log_{15}(9^{x-1}+25^{x-1})=x-2+\log_{15} 34$:

* **146.** ա) $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}=10$, բ) $4^{1+\log_4^2 x}-3\cdot x^{\log_4 x}=32$:

* **147.** Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարման լուծումը մեկից մեծ թիվ է.

ա) $\log_{1,2} x = \dfrac{2a-5}{3-a}$, բ) $\log_{0,8} x = \dfrac{8-2a}{a-7}$:

* **148.** Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարման լուծումը մեկից փոքր թիվ է.

ա) $\log_{0,4} x = \dfrac{a+3}{9-4a}$, բ) $\log_{\sqrt{3}} x = \dfrac{12a-8}{9a-2}$:

Լուծել հավասարումների համակարգը (149-150).

149. ա) $\begin{cases} x+y=34 \\ \log_2 x+\log_2 y=6; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} xy=2 \\ 2\log_2 x-\log_2 y=8; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \log_4(x+y)=2 \\ \log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 7; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \log_{0,2}(x+y)+2=0 \\ \log_{0,2}(x-y)+1=0: \end{cases}$

150. ա) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 10^{\lg(3x+2y)}=39 \\ \lg x-\lg y=\lg 15-1; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 3^{2x-y}=81 \\ \lg xy=1+\lg 3; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 25^{x+y}=5^{x-y} \\ \log_5(y-x)+\log_5 4y=2: \end{cases}$

Կրկնության համար

151. Ապացուցել, որ երկնիշ թվի և նույն թվանշաններով, բայց հակառակ կարգով գրված թվի գումարը բաժանվում է 11-ի:

152. Ապացուցել, որ բնական թվի քառակուսին 5-ի բաժանելիս չի կարող ստացվել՝

ա) 2 մնացորդ, բ) 3 մնացորդ:

153. Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի դեպքում n^5+4n թիվը բաժանվում է 5-ի:

§5. Լոգարիթմական անհավասարումներ

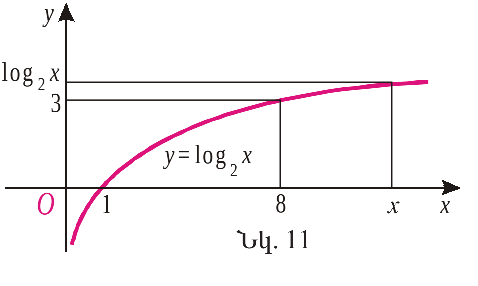
Դիտարկենք ***պարզագույն լոգարիթմական անհավասարումները***՝

$$\log_a x>b \quad \text{և} \quad \log_a x<b, \qquad (1)$$

որտեղ a-ն 1-ից տարբեր դրական թիվ է: Սկզբում դիտարկենք հետևյալ օրինակը:

Օրինակ 1: Լուծենք $\log_2 x>3$ անհավասարումը:

Գիտենք, որ $f(x)=\log_2 x$ լոգարիթմական ֆունկցիան որոշված է $(0;\infty)$ միջակայքում: Այն աճող է և ընդունում է 3 արժեքը $x=2^3=8$ կետում՝ $\log_2 8=3$: Հետևաբար (նկ. 11),



Նկ. 11

$$\log_2 x > 3 \Leftrightarrow \log_2 x > \log_2 8 \Leftrightarrow x > 8:$$

Պատասխան՝ $(8;\infty)$:

Այժմ քննարկենք ընդհանուր դեպքը: Հիշենք, որ $f(x) = \log_a x$ լոգարիթմական ֆունկցիան որոշված է $(0;\infty)$ միջակայքում, ընդ որում, այն աճող է, եթե $a > 1$ և նվազող է, եթե $0 < a < 1$: Դա նշանակում է, որ.

> ***եթե*** $\boldsymbol{a > 1}$, ***ապա***
>
> $$\boldsymbol{\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u > v > 0}$$
>
> ***եթե*** $\boldsymbol{0 < a < 1}$, ***ապա***
>
> $$\boldsymbol{\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < v}:$$

Այսպիսով միևնույն հիմքով լոգարիթմների անհավասարությունից նրանց արգումենտների անհավասարությանն անցնելիս՝

ա) ***1-ից մեծ հիմքի դեպքում անհավասարության նշանը չի փոխվում,***

բ) ***1-ից փոքր հիմքի դեպքում անհավասարության նշանը շրջվում է:***

Եվ հակառակը. դրական անդամներով անհավասարման երկու մասերը կարելի է լոգարիթմել միևնույն հիմքով, ընդ որում, անհավասարության նշանը չի փոխվում, եթե հիմքը մեծ է մեկից և շրջվում է, եթե հիմքը փոքր է մեկից:

Վերադառնալով (1) անհավասարումներին, նկատենք, որ դրանք կարելի է գրել հետևյալ տեսքերով՝

$$\log_a x > \log_a a^b \quad \text{և} \quad \log_a x < \log_a a^b:$$

Այժմ, հաշվի առնելով, որ $a^b > 0$, կստանանք, որ կամայական b թվի համար,

> ***եթե*** $\boldsymbol{a > 1}$, ***ապա***՝
>
> $$\boldsymbol{\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b},$$
> $$\boldsymbol{\log_a x < b \Leftrightarrow 0 < x < a^b}$$
>
> ***եթե*** $\boldsymbol{0 < a < 1}$, ***ապա***՝
>
> $$\boldsymbol{\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b}$$
> $$\boldsymbol{\log_a x < b \Leftrightarrow x > a^b}$$

Համանմանորեն են լուծվում նաև պարզագույն լոգարիթմական ոչ խիստ անհավասարումները:

Օրինակ 2: $\log_{0,5} x \geq 2$ անհավասարման լուծումն է՝ $0 < x \leq 0,25$, իսկ $\log_{0,5} x \leq 2$ անհավասարմանը՝ $x \geq 0,25$:

Այն դեպքերում, երբ (1) անհավասարումներում x-ի փոխարեն գրված է փոփոխական պարունակող որևէ արտահայտություն, լուծումը գտնվում է նման ձևով:

Օրինակ 3: Լուծենք անհավասարումը.

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x+3) \geq -2:$$

Քանի որ լոգարիթմի հիմքը փոքր է մեկից, անհավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} 2x+3>0 \\ 2x+3\le\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} \end{cases}$$

համակարգին, որի լուծումն է՝ $-1{,}5<x\le 11$:

Պատասխան՝ $(-1{,}5;11]$:

Նշենք, որ լոգարիթմների օգնությամբ կարելի է լուծել $a^x>b$ կամ $a^x<b$ տեսքի կամայական պարզագույն ցուցչային անհավասարում, որը մենք մինչ այժմ լուծել ենք միայն այն դեպքերում, երբ b-ն կարողացել ենք ներկայացնել a-ի աստիճանի տեսքով:

Օրինակ 4: Լուծենք $2^x<5$ անհավասարումը:

Քանի որ $2>1$, կարող ենք անհավասարման երկու մասերը լոգարիթմել 2 հիմքով, պահպանելով անհավասարության նշանը՝ $\log_2 2^x<\log_2 5$, որտեղից՝ $x<\log_2 5$:

Պատասխան՝ $(-\infty;\log_2 5)$:

Լոգարիթմի հիմնական հատկությունների օգնությամբ լոգարիթմական անհավասարումները պարզեցնելիս, ինչպես և հավասարումների դեպքում, կարող են առաջանալ ավելորդ լուծումներ: Եթե հավասարումների դեպքում մենք կարող էինք նրանցից ազատվել ստացված մի քանի արմատների ստուգմամբ, ապա անհավասարման դեպքում, երբ լուծումը, որպես կանոն, անվերջ բազմություն է, հիմնականում անհրաժեշտ է լինում գտնել անհավասարման ԹԱԲ-ը և պարզեցված անհավասարման լուծումների բազմությունը հատել նրա հետ:

Օրինակ 5: Լուծենք անհավասարումը.

$$\lg(x+27)-\lg(16-2x)>\lg x:$$

Նախ, լուծելով

$$\begin{cases} x+27>0 \\ 16-2x>0 \\ x>0 \end{cases}$$

համակարգը, գտնենք անհավասարման ԹԱԲ-ը՝ $x\in(0;8)$: Այնուհետև անհավասարումը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\lg(x+27)>\lg(16-2x)+\lg x,$$

որտեղից կստանանք.

$$\lg(x+27)>\lg(16-2x)x:$$

Քանի որ լոգարիթմի հիմքը մեծ է 1-ից, ուրեմն

$$x+27>(16-2x)x:$$

Այս քառակուսային անհավասարման լուծումն է՝ $x\in(-\infty;3)\cup(4{,}5;\infty)$, որը հատելով

ԹԱԲ-ի հետ, ստանում ենք պատասխանը:

Պատասխան՝ $(0;3)\cup(4{,}5;8)$:

Օրինակ 6: Լուծենք անհավասարումը.

$$\log_{0,5}^2 x+3\log_{0,5} x-10\geq 0:$$

Անհավասարումը $\log_{0,5} x=t$ նշանակումով բերվում է $t^2+3t-10\geq 0$ քառակուսային անհավասարմանը, որի լուծումն է՝

$$\left[\begin{array}{l} t\leq -5 \\ t\geq 2 \end{array}\right.$$

համախումբը: Վերադառնալով նշանակմանը, ստանում ենք

$$\left[\begin{array}{l} \log_{0,5} x\leq -5 \\ \log_{0,5} x\geq 2 \end{array}\right.$$

համախումբը: Հաշվի առնելով, որ լոգարիթմի հիմքը փոքր է մեկից, գտնում ենք, որ ստացված պարզագույն լոգարիթմական հավասարումներից առաջինի լուծումն է՝ $x\geq 32$, իսկ երկրորդինը՝ $0<x\leq 0{,}25$: Միավորելով այս լուծումները, ստանում ենք պատասխանը:

Պատասխան՝ $(0;0{,}25]\cup[32;\infty)$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Որո՞նք են պարզագույն լոգարիթմական անհավասարումները:
2. Ո՞րն է $\log_a x\geq b$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a>1$, բ) $0<a<1$:
3. Ո՞րն է $\log_a x<b$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a>1$, բ) $0<a<1$:
4. Ո՞րն է $a^x>b$ անհավասարման լուծումը, եթե՝ ա) $a>1$, բ) $0<a<1$:

Առաջադրանքներ

Լուծել անհավասարումը (154-166).

154. ա) $\log_2(x-5)\geq 3$, բ) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)>2$, գ) $\log_5(x-5)\leq -2$,

դ) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\leq -5$, ե) $\log_7(6-x)<1$, զ) $\log_{\frac{1}{5}}(x-8)>1$,

է) $\log_9(3x-6)>0$, ը) $\log_{\frac{7}{8}}(4x+8)\leq 0$, թ) $\lg(12x-18)\leq 0$:

155. ա) $\log_3(x^2+7x-5)<1$, բ) $\log_{0,1}(x^2+2x+2)\leq -1$,

գ) $\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{x+4}{x+5}>-3$, դ) $\log_2\dfrac{3x-1}{x+2}<0$:

156. ա) $\lg(11-3x)<2-\lg 5$, բ) $\lg(7x+5)<1+\lg 3$, գ) $\log_2\left(4x-x^2\right)<5+2\log_{0,5}3$, դ) $\log_2\left(x^2-3x-4\right)\le 2+\log_{\sqrt{2}}3$:

157. ա) $\log_4(x+3)\le\log_4(9x-13)$, բ) $\log_{\frac{3}{5}}(2x+7)>\log_{\frac{3}{5}}(7x-18)$,

գ) $\log_{\sqrt{10}}(2x+1)>\lg(8x+9)$, դ) $2\log_{0,3}(2x-7)\le\log_{0,3}(3x-6)$:

158. ա) $\log_2 x+\log_2(x-3)>2$, բ) $\log_{\sqrt{6}}(x-4)+2\log_6(x+1)\le 2$,

գ) $\lg x+\lg(13-2x)<1+\lg 2$, դ) $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}\sqrt{x+7}+\log_{\frac{1}{7}}(x+1)\le -1$:

159. ա) $4\log_2^2 x+\log_2 x>5$, բ) $\log_{\frac{1}{6}}^2 x+3\log_{\frac{1}{6}}\frac{x}{6}\le 1$,

գ) $1-\frac{1}{5-\lg x}<\frac{2}{\lg x+1}$, դ) $\log_{0,5}x+4\ge\frac{\log_{0,5}^2 x}{4-\log_{0,5}x}$:

160. ա) $\log_2\log_5 x<0$, բ) $\log_3\log_{0,3}(3x-5)\ge 0$,

գ) $\log_{0,3}\log_3\left(-\frac{x}{3}\right)\ge 0$, դ) $\log_{\frac{1}{9}}\log_{27}\left(1+\frac{x}{5}\right)>0$:

➢**161.** ա) $(2x)^{\log_2 x}>64$, բ) $x^{\log_3(9x)}\le 27$,

գ) $x^{\lg 10x}<100x^2$, դ) $x^{1-\log_5 x}\ge\frac{25}{x^2}$:

162. ա) $4+\log_3\left(3^x-80\right)\le x$, բ) $\log_5\left(25^x-4\right)>2x-1$,

➢գ) $\log_{\sqrt{3}}\left(3^x-18\right)\le x+1$, ➢դ) $\log_{0,5}\left(2^x-2\right)\ge x-3$:

* **163.** ա) $\frac{x^2-4}{10}>(x-2)^{\lg(x+2)}$, բ) $2(x-3)^{\log_6 x}\le\frac{x^2-3x}{3}$:

➢**164.** ա) $\log_{3x-5}7<0$, բ) $\log_{2x-7}0{,}8>0$,

գ) $\log_x\left(1+\sqrt{x}\right)>0$, դ) $\log_x\left(1+x^2\right)<0$:

* **165.** ա) $\log_x\frac{5x-2}{2}\ge 2$, բ) $\log_x\frac{10x-3}{3}<2$:

* **166.** ա) $\log_9\left(|x+1|-2\right)-0{,}5\le 0$, բ) $\log_{0,25}\left(22-|3x-1|\right)>1{,}5$:

Կրկնության համար

167. Ներկայացնել սովորական կոտորակի տեսքով.

ա) $0,(3)$, բ) $0,(12)$, գ) $4,(2)$, դ) $1{,}3(6)$, ե) $2{,}5(10)$:

➢**168.** Գտնել անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարարը, եթե նրա անդամների գումարը 4 է, իսկ անդամների խորանարդների գումարը՝ 192:

3րդ ԳԼՈՒԽ

Տրամաբանության տարրերը

§1. Ասույթներ, դրանց տրամաբանական գումարը, արտադրյալը և ժխտումը

Դիտարկենք հետևյալ նախադասությունները.

(A) Երևանը Հայաստանի մայրաքաղաքն է:

(B) Ամենաարագաշարժ կենդանին կրիան է:

(C) $3+2=5$: (D) $4+6<7$:

(E) $3\cdot 2>5$: (F) $\sin\frac{\pi}{7}=0$:

Այս նախադասություններից յուրաքանչյուրը ճշմարիտ է կամ կեղծ: Նման դատողություններն անվանում են ***ասույթ*** (պնդում): Յուրաքանչյուր ասույթ կարող է լինել ճշմարիտ կամ կեղծ: Գտնել ասույթի ***ճշմարտային արժեքը***, նշանակում է` պարզել ասույթի ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը: Այսինքն` ասույթը կարող է ունենալ երկու ճշմարտային արժեք` «ճշմարիտ» և «կեղծ»: Բերված ասույթների ճշմարտային արժեքները գտնելը հեշտ է` A, C, E ասույթները ճշմարիտ են, իսկ B, D, F ասույթները` կեղծ:

«1-ը փոքր թիվ է» նախադասությունն ասույթ չէ, քանի որ հնարավոր չէ պարզել այն ճշմարիտ է, թե` կեղծ: Իհարկե 10-ի համեմատությամբ 1-ը փոքր թիվ է, բայց 0,1-ի համեմատությամբ էլ մեծ է:

Դիտարկենք հետևյալ դատողությունները.

$G(x)$ x թիվը բաժանվում է 5-ի:

$H(x)$ x թիվը դրական է:

$I(x)$ $x^2+2x>9$:

Եթե $x=10$, ապա երեք ասույթներն էլ ճշմարիտ են, իսկ եթե $x=1$, ապա $H(x)$ ասույթը ճշմարիտ է, իսկ $G(x)$ և $I(x)$ ասույթները` կեղծ: Սրանք ***փոփոխական պարունակող ասույթներ*** են (ասույթային ձևեր), որոնք $x$ փոփոխականի որոշ արժեքների դեպքում կարող են լինել ճշմարիտ, իսկ որոշների դեպքում` կեղծ:

$\log_2 x=0$ հավասարումը (ինչպես և կամայական այլ հավասարում) փոփոխական պարունակող ասույթ է: Երբ $x=8$, այն ճշմարիտ ասույթ է, իսկ x-ի մնացած արժեքների դեպքում դառնում է կեղծ ասույթ:

Այժմ դիտարկենք հետևյալ ասույթները.

(J) Գոյություն ունի x բնական թիվ, որը բաժանվում է 5-ի:

(K) Կամայական x բնական թիվ բաժանվում է 5-ի:

Առաջին հայացքից սրանք նույնպես փոփոխական պարունակող ասույթներ են: Սակայն դժվար չէ նկատել, որ իրականում դրանք կախված չեն x-ից:

J ասույթը պնդում է, որ բոլոր բնական թվերի մեջ կա գոնե մեկը, որը բաժանվում է 5-ի, և եթե այդպիսին կա, ապա J ասույթը ճշմարիտ է, իսկ եթե չկա, ապա կեղծ է:

K ասույթը պնդում է, որ բոլոր բնական թվերը բաժանվում են 5-ի, և եթե կա գոնե մեկ բնական թիվ որը չի բաժանվում 5-ի, ապա K ասույթը կեղծ է: Իհարկե պարզ է, որ J ասույթը ճշմարիտ է, իսկ K ասույթը՝ կեղծ:

«Գոյություն ունի» արտահայտությունն ընդունված է նշանակել $\exists$ նշանով, ինչն անվանում են ***գոյության քվանտոր***: «Կամայական» բառի փոխարեն հաճախ օգտագործում են ***ընդհանրության քվանտորը***՝ $\forall$ նշանը: Այս նշաններով J և K ասույթները գրվում են այսպես.

(J) $\exists x \in \mathbf{R}\ (x \vdots 5)$,

(K) $\forall x \in \mathbf{R}\ (x \vdots 5)$:

Գոյության և ընդհանրության քվանտորների միջոցով կարելի է համառոտագրել տարբեր ասույթներ:

Օրինակ 1: ա) «Կամայական երեք հաջորդական բնական թվերի արտադրյալը բաժանվում է 3-ի» ասույթը կարելի է համառոտագրել հետևյալ կերպ.

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \left[n(n+1)(n+2) \vdots 3\right]:$$

բ) «Բնական թվերի կամայական A ենթաբազմությունում գոյություն ունի այնպիսի m թիվ, որ A-ին պատկանող կամայական թիվ մեծ է կամ հավասար m-ից» ասույթը գրվում է այսպես.

$$\forall A \subset \mathbf{N}\left[\exists m \in A\left(\forall n \in A(n \geq m)\right)\right]:$$

Այս ասույթը բացահայտում է բնական թվերի բազմության այն առանձնահատկությունը, որ բնական թվերի բազմության կամայական ենթաբազմություն ունի նվազագույն տարր:

Դիտարկենք հետևյալ ասույթները.

Ա. Ես կհանդիպեմ ընկերոջս:

Բ. Ես կգնամ տուն:

Գ. Ես կհանդիպեմ ընկերոջս կամ կգնամ տուն:

Դ. Ես կհանդիպեմ ընկերոջս և կգնամ տուն:

Ե. Ես չեմ հանդիպի ընկերոջս:

Զ. Ես չեմ գնա տուն:

Գ ասույթը ճշմարիտ է, եթե ճշմարիտ է Ա և Բ ասույթներից գոնե մեկը և կեղծ է, եթե երկուսն էլ կեղծ են: Այս դեպքում ասում են, որ Գ ասույթը Ա և Բ ասույթների ***տրամաբանական գումարն*** է, և գրում են.

Գ = Ա ∨ Բ (կարդացվում է` Ա կամ Բ):

Նկատենք, որ առօրյա խոսակցություններում «կամ» շաղկապն օգտագործելիս, ասելով` «Ես կհանդիպեմ ընկերոջս կամ կգնամ տուն» ավելի հաճախ հասկանում ենք երկուսից մեկը. կամ կհանդիպեմ ընկերոջս, կամ կգնամ տուն և ոչ երկուսը միասին: Մաթեմատիկայում «Ա կամ Բ» ասույթը ճշմարիտ է նաև այն դեպքում, երբ Ա և Բ ասույթները երկուսն էլ ճշմարիտ են:

Դ ասույթը ճշմարիտ է, եթե ճշմարիտ են և՛ Ա-ն, և՛ Բ-ն և կեղծ է, եթե դրանցից գոնե մեկը կեղծ է: Դ ասույթը Ա և Բ ասույթների ***տրամաբանական արտադրյալն*** է`

Դ = Ա ∧ Բ (կարդացվում է` Ա և Բ):

Ե ասույթն Ա ասույթի ***ժխտումն*** է: Այն ճշմարիտ է, եթե կեղծ է Ա-ն, և կեղծ է, եթե Ա-ն ճշմարիտ է: Ա ասույթի ժխտումը գրվում է այսպես` ¬Ա կամ պարզապես` «ոչ Ա»:

Հանգունորեն, Զ ասույթը Բ-ի ժխտումն է` Զ = ¬Բ: Պարզ է, որ Զ ասույթի ժխտումն էլ Բ-ն է` Բ = ¬Զ, այսինքն` Բ = ¬(¬Բ):

Դժվար չի տեսնել, որ «ոչ Գ» ասույթը ճշմարիտ է (այսինքն` Գ-ն կեղծ է) միայն այն դեպքում, երբ ճշմարիտ են «ոչ Ա» և «ոչ Բ» ասույթները (այսինքն` Ա-ն և Բ-ն կեղծ են): Նշանակում է` «Ա կամ Բ» տրամաբանական գումարի ժխտումը «ոչ Ա և ոչ Բ» տրամաբանական արտադրյալն է:

Հանգունորեն կարող ենք համոզվել, որ «Ա և Բ» տրամաբանական արտադրյալի ժխտումը «ոչ Ա կամ ոչ Բ» տրամաբանական գումարն է:

A և B ասույթների տրամաբանական գումարը` A ∨ B (A կամ B) ասույթը ճշմարիտ է, եթե ճշմարիտ է A և B ասույթներից գոնե մեկը, և կեղծ է, եթե երկուսն էլ կեղծ են:

A և B ասույթների տրամաբանական արտադրյալը` A ∧ B (A և B) ասույթը ճշմարիտ է, եթե ճշմարիտ են և՛ A -ն, և՛ B -ն, և կեղծ է, եթե դրանցից գոնե մեկը կեղծ է:

A և ¬A (ոչ A) ասույթներից մեկը ճշմարիտ է, մյուսը` կեղծ (երրորդի բացառման օրենք)***:***

Ասվածից հետևում է, որ տեղի ունեն հետևյալ բանաձևերը, որոնց անվանում են ***Դե Մորգանի օրենքներ***.

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)\,,\ \neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)\ :$$

Այս օրենքներին դուք ծանոթ եք 8-րդ դասարանի դասընթացից: Հիշեք. «բանաձևերի համախմբի ժխտումը համարժեք է դրանց ժխտումների համակարգին» և «բանաձևերի համակարգի ժխտումը համարժեք է դրանց ժխտումների համախմբին»:

Ստորև բերված է տրամաբանական գործողությունների ճշմարտային արժեքների աղյուսակը («Ճ» նշանակում է՝ «ճշմարիտ», իսկ «Կ» նշանակում է՝ «կեղծ»).

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg(A \wedge B)$
Ճ	Ճ	Ճ	Ճ	Կ	Կ	Կ	Կ
Ճ	Կ	Ճ	Կ	Կ	Ճ	Կ	Ճ
Կ	Ճ	Ճ	Կ	Ճ	Կ	Կ	Ճ
Կ	Կ	Կ	Կ	Ճ	Ճ	Ճ	Ճ

Օրինակ 2: Դիտարկենք ասույթների և դրանց ժխտումների օրինակներ:

ա. Ֆրանսիայի մայրաքաղաքը Մադրիդն է կամ Լոնդոնը:

$\neg$ա. Ֆրանսիայի մայրաքաղաքը ո՛չ Մադրիդն է, և ոչ էլ՝ Լոնդոնը:

բ. Գնդակը տանն է և քնած չէ:

$\neg$բ. Գնդակը տանը չէ կամ քնած է:

գ. Դպրոցի բոլոր դասասենյակները վերանորոգված են:

$\neg$գ. Դպրոցում կա չվերանորոգված դասասենյակ:

դ. Կա դասարան, որի յուրաքանչյուր աշակերտ լավ է սովորում:

$\neg$դ. Յուրաքանչյուր դասարանում կա աշակերտ, որը լավ չի սովորում:

ե. Կամայական x ունի $A(x)$ հատկությունը:

$\neg$ե. Գոյություն ունի x, որը չունի $A(x)$ հատկությունը:

զ. Գոյություն ունի x, որն օժտված է $A(x)$ հատկությամբ:

$\neg$զ. Կամայական x օժտված չէ $A(x)$ հատկությամբ:

Նշենք, որ գ ասույթի ժխտումը չի կարելի ձևակերպել այսպես.

է. «Դպրոցի բոլոր դասասենյակները վերանորոգված չեն»:

Իրոք, եթե դպրոցում լինի և՛ վերանորոգված, և՛ չվերանորոգված դասարան, ապա կեղծ կլինեն և՛ գ, և՛ է ասույթները, մինչդեռ ասույթը և իր ժխտումը միաժամանակ կեղծ լինել չեն կարող:

Հանգունորեն, սխալ է դ ասույթի ժխտման այսպիսի ձևակերպումը.

ը. «Կա դասարան, որի յուրաքանչյուր աշակերտ լավ չի սովորում», քանի որ և՛ դ, և՛ ը ասույթները կեղծ են, եթե դասարանում կա և՛ լավ սովորող աշակերտ, և՛ աշակերտ, որ լավ չի սովորում:

Ստորև բերված են ե և զ դատողությունները և դրանց ժխտումները քվանտորների լեզվով.

$$\neg[\forall x\,(A(x))] = \exists x\,(\neg A(x)),\ \ \neg[\exists x\,(A(x))] = \forall x\,(\neg A(x)):$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Բերեք ասույթների օրինակներ և նշեք դրանց ճշմարտային արժեքները:
2. Բերեք փոփոխական պարունակող ասույթների օրինակներ:
3. Բերեք ասույթների օրինակներ և կազմեք դրանց տրամաբանական գումարը, արտադրյալը, ժխտումը:
4. Ե՞րբ է ճշմարիտ ասույթների տրամաբանական գումարը և երբ՝ կեղծ:
5. Ե՞րբ է ճշմարիտ ասույթների տրամաբանական արտադրյալը և երբ՝ կեղծ:
6. Ձևակերպեք Դե Մորգանի օրենքները:
7. Կազմեք «կամայական» և «գոյություն ունի» արտահայտություններով ասույթներ և գրեք դրանց ժխտումները:

Առաջադրանքներ

Գտեք ասույթի ճշմարտային արժեքը (169-171).

169. ա) 347-ը զույգ թիվ է: բ) $\sqrt{2}$ -ը ռացիոնալ է:

գ) (15),7 թիվը բացասական է: դ) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ թիվը ռացիոնալ է:

ե) 29-ը բաժանվում է 2-ի: զ) $2\sqrt{3}>\sqrt{12}$:

170. ա) $y=\sin x$ ֆունկցիան սահմանափակ է:

բ) $y=\operatorname{tg} x$ ֆունկցիան սահմանափակ է:

գ) $y=\cos x$ ֆունկցիան զույգ է:

դ) $y=x+1$ ֆունկցիան կենտ է:

171. ա) Յուրաքանչյուր զուգահեռագիծ շեղանկյուն է:

բ) Կամայական շեղանկյուն քառակուսի է:

գ) Գոյություն ունի ուղղանկյուն, որը քառակուսի է:

դ) Գոյություն ունի շեղանկյուն, որը քառակուսի չէ:

ե) Կամայական շեղանկյուն զուգահեռագիծ է:

զ) Կամայական քառանիստ բուրգ է:

է) Կամայական քառակուսի քառանկյուն է:

➤ **172.** Պարզեք, թե հետևյալ նախադասություններից որոնք են ասույթ և գտեք դրանց ճշմարտային արժեքը.

ա) Տուն կառուցելու համար մեկ ամիսը կարճ ժամկետ է:

բ) Մեկ ամիսը կարճ ժամկետ է:

գ) $y=x^5$ ֆունկցիան աճող է:

դ) $y=x^5$ ֆունկցիան արագ է աճում:

173. Ձևակերպեք տրված ասույթների տրամաբանական գումարն ու արտադրյալը և նշեք դրանց ճշմարտային արժեքները.

ա) $5>2,\ 5=2$, բ) $3>3,\ 3=3$, գ) $7<9,\ 7=9$, դ) $8<8,\ 8=8$:

174. Դիցուք A-ն որևէ ասույթ է: Գտեք հետևյալ ասույթների ճշմարտային արժեքները.

ա) $A \vee (\neg A)$, բ) $A \wedge (\neg A)$:

175. Փոփոխական պարունակող ասույթը գրեք ավելի պարզ տեսքով.

ա) $(x > 1) \vee (x = 1)$, բ) $(x < 5) \vee (x = 5)$, գ) $(x < -7) \vee (x > 7)$,

դ) $(x > -4) \wedge (x < 4)$, ե) $\neg(x > 19)$, զ) $\neg(x < 21)$:

176. Կազմեք տրված ասույթների տրամաբանական գումարն ու արտադրյալը և ձևակերպեք դրանց ժխտումները.

ա) Սոնան գնաց թատրոն: Արամը գնաց թատրոն:

բ) Սոնան գերազանցիկ է: Արամը գերազանցիկ է:

գ) Արկղում կա սպիտակ գնդիկ: Արկղում չկա սև գնդիկ:

դ) Լիլիթը դպրոցական է: Լիլիթը շախմատ չի խաղում:

➤ **177.** Օգտվելով համապատասխան սահմանումից՝ ձևակերպեք, թե ինչ է նշանակում՝

ա) ABC եռանկյունը հավասարակողմ չէ:

բ) ABC եռանկյունը հավասարասրուն չէ:

գ) $ABCD$ քառանկյունը զուգահեռագիծ չէ:

դ) $ABCD$ քառանկյունը սեղան չէ:

➤ **178.** Ձևակերպեք ասույթի ժխտումը.

ա) Դահլիճի բոլոր դռները փայտից են:

բ) Յուրաքանչյուր բակում մեքենա է կանգնած:

գ) Որոշ ծաղիկներ չեն ծաղկում գարնանը:

դ) Գոյություն ունի ծաղիկ, որը չի ծաղկում աշնանը:

179. Ապացուցեք, որ կամայական A, B, C ասույթների համար ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը.

ա) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$, բ) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

գ) $\neg(A \vee B \vee C) = (\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)$:

180. Հետևյալ ասույթները և դրանց ժխտումները համառոտագրեք քվանտորների օգնությամբ.

ա) Կամայական բնական թիվ զույգ է կամ կենտ:

բ) Կամայական իրական թիվ ռացիոնալ է կամ իռացիոնալ:

գ) Գոյություն ունի բնական թիվ, որը բաժանվում է 3-ի և 5-ի:

դ) Գոյություն ունի բնական թիվ, որը բաժանվում է 44-ի և չի բաժանվում 11-ի:

➤ **181.** Հետևյալ ասույթները և դրանց ժխտումները համառոտագրեք քվանտորների օգնությամբ և գտեք ճշմարտային արժեքները.

ա) Կամայական բնական թվի հակադարձը ռացիոնալ թիվ է:

բ) Գոյություն ունի ամբողջ թիվ, որի հակադարձը ռացիոնալ թիվ չէ:

գ) Կամայական բնական թվի համար գոյություն ունի դրանից մեծ բնական թիվ:

դ) Գոյություն ունի բնական թիվ, որը փոքր է մնացած բնական թվերից:

➢**182.** Գտեք ասույթի ճշմարտային արժեքը և ձևակերպեք ժխտումը:

ա) Յուրաքանչյուր բնական թիվ, որը բաժանվում է 2-ի և 5-ի, պատիկ է 10-ին:

բ) Յուրաքանչյուր բնական թիվ, որը բաժանվում է 8-ի և 14-ի, պատիկ է 112-ին:

183. Ո՞րն է «Կինոթատրոնի բոլոր նստատեղերը զբաղված են» ասույթի ժխտումը.

ա) Կինոթատրոնի բոլոր նստատեղերը զբաղված չեն:

բ) Կինոթատրոնում կա ազատ նստատեղ:

գ) Կինոթատրոնի որոշ նստատեղեր զբաղված են:

դ) Կինոթատրոնի կամայական նստատեղ ազատ է:

➢**184.** Ո՞րն է «Որոշ հաջորդականություններ թվաբանական պրոգրեսիա են» ասույթի ժխտումը.

ա) Բոլոր հաջորդականությունները թվաբանական պրոգրեսիա են:

բ) Որոշ հաջորդականություններ թվաբանական պրոգրեսիա չեն:

գ) Կամայական հաջորդականություն երկրաչափական պրոգրեսիա է:

դ) Կամայական հաջորդականություն թվաբանական պրոգրեսիա չէ:

* **185.** Ձևակերպեք ասույթի ժխտումը.

ա) Գոյություն ունի երկիր, որտեղ կամայական քաղաքում կա դպրոց, որի բոլոր դասասենյակները վերանորոգված են:

բ) Կամայական քաղաքում գոյություն ունի այգի, որի կամայական ծառի վրա կա չորացած ճյուղ:

186. Օգտվելով համապատասխան սահմանումից՝ գրեք, թե ինչ է նշանակում՝

➢ա) $f(x),\ x\in \mathbf{R}$, ֆունկցիան զույգ չէ:

➢բ) $f(x),\ x\in \mathbf{R}$, ֆունկցիան կենտ չէ:

*գ) T թիվը $f(x),\ x\in \mathbf{R}$, ֆունկցիայի պարբերություն չէ:

*դ) $f(x),\ x\in \mathbf{R}$, ֆունկցիան պարբերական չէ:

Կրկնության համար

➢**187.** Ապացուցեք, որ կամայական α -ի համար՝

ա) $\dfrac{1}{2}\le \sin^4\alpha+\cos^4\alpha\le 1$,   բ) $\dfrac{1}{4}\le \sin^6\alpha+\cos^6\alpha\le 1$,

գ) $1<\dfrac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-\sin^2\alpha-\cos^6\alpha}<2$, $\alpha\ne\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$,

դ) $\dfrac{2}{3}<\dfrac{1-\cos^4\alpha-\sin^6\alpha}{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}<1$, $\alpha\ne\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$:

§2. Հետևություն և համարժեքություն

Թե՛ առօրյա խոսակցություններում, թե՛ մաթեմատիկայում հաճախ ենք հանդիպում «Եթե A, ապա B» տեսքի ասույթների, ինչն անվանել ենք ***հետևություն***: Ինչպես գիտենք, այստեղ A ասույթը կոչվում է ***պայման***, իսկ B-ն՝ ***հետևանք:*** Եթե պայմանի ճշմարիտ լինելու դեպքում ճշմարիտ է նաև հետևանքը, ապա հետևությունը ճշմարիտ է: Հետևությունը կեղծ է, եթե պայմանը ճշմարիտ է, իսկ հետևանքը՝ կեղծ:

Այստեղ A-ն և B-ն կարող են լինել ինչպես պարզ ասույթներ (օրինակ՝ «Եթե անձրև գա, ապա խաղալու չեմ գնա»), այնպես էլ փոփոխական պարունակող դատողություններ (օրինակ՝ «Եթե $x>4$, ապա $\sqrt{x}>2$»):

Փոփոխական պարունակող՝ «Եթե $A(x)$, ապա $B(x)$» տեսքի հետևությունը ճշմարիտ է, եթե <u>կամայական</u> x<u>-ի համար</u> $A(x)$ պայմանի ճշմարիտ լինելու դեպքում ճշմարիտ է նաև $B(x)$ հետևանքը:
Հետևությունը կեղծ է, նշանակում է՝ <u>գոյություն ունի այնպիսի</u> x, որ $A(x)$-ը ճշմարիտ է, իսկ $B(x)$-ը՝ կեղծ:

«Եթե $A(x)$, ապա $B(x)$» հետևությունը կրճատ գրառում ենք այսպես՝

$$A(x)\Rightarrow B(x)$$

(երբեմն օգտագործվում է նաև $B(x)\Leftarrow A(x)$ նշանակումը):

Օրինակ 1. Տրված է $y=f(x)$, $x\in\mathbf{R}$, ֆունկցիան:

ա) «$x\in\mathbf{R}\Rightarrow f(x)\le 1$» հետևությունը կեղծ է, նշանակում է՝ «Գոյություն ունի այնպիսի x իրական թիվ, որ $f(x)>1$»

բ) «Կամայական x_1 և x_2 թվերի համար $x_1<x_2$ պայմանից հետևում է, որ $f(x_1)<f(x_2)$» պնդումը կեղծ է, նշանակում է ՝ «Գոյություն ունեն x_1 և x_2 թվեր, որ $x_1<x_2$ և $f(x_1)\ge f(x_2)$»:

Դիտարկենք հետևյալ հետևությունները.

Հետևությունը	Տեսքը
Ա. Եթե $x=3$, ապա $x^2=9$:	Ա. Եթե $A(x)$, ապա $B(x)$:
Բ. Եթե $x^2=9$, ապա $x=3$:	Բ. Եթե $B(x)$, ապա $A(x)$:
Գ. Եթե $x\ne 3$, ապա $x^2\ne 9$:	Գ. Եթե ոչ $A(x)$, ապա ոչ $B(x)$:
Դ. Եթե $x^2\ne 9$ ապա $x\ne 3$:	Դ. Եթե ոչ $B(x)$, ապա ոչ $A(x)$:

Հեշտ է նկատել, որ Բ պնդումն ստացվել է Ա-ից՝ պայմանի և հետևանքի տեղերը փոխելով: Նման դեպքում ասում են, որ Բ-ն Ա-ի ***հակադարձ պնդումն*** է է, իսկ Ա-ն անվանում են ***ուղիղ պնդում***: Պարզ է, որ Ա պնդումն էլ Բ-ի հակադարձն է, ուստի ասում են նաև, որ Ա-ն և Բ-ն ***փոխհակադարձ պնդումներ*** են:

Գ պնդումը կոչվում է Ա-ի ***հակադիր պնդում***: Ա-ն, իր հերթին, Գ-ի հակադիրն է, Ա-ն և Գ-ն ***փոխհակադիր պնդումներ*** են:

Պարզ է, որ Դ պնդումը Գ-ի հակադարձն է և Բ-ի հակադիրը, այսինքն՝ Ա ուղիղ պնդման ***հակադարձի հակադիրը***:

Դիտարկված օրինակներում Ա և Դ հետևությունները ճշմարիտ են, իսկ Բ-ն և Գ-ն՝ կեղծ ($x=-3$ դեպքում Բ-ի և Գ-ի պայմանները ճշմարիտ են, իսկ հետևանքները՝ կեղծ):

Օրինակ 2: Կամայական a և b իրական թվերի համար.

Ա. Եթե $a=b$, ապա $a^3=b^3$ (ուղիղ պնդում):

Բ. Եթե $a^3=b^3$, ապա $a=b$ (հակադարձ պնդում):

Գ. Եթե $a\neq b$, ապա $a^3\neq b^3$ (հակադիր պնդում):

Դ. Եթե $a^3\neq b^3$, ապա $a\neq b$ (հակադարձի հակադիր պնդում):

Այս օրինակում բոլոր պնդումները ճշմարիտ են:

Դժվար չէ տեսնել, որ կամայական հետևության դեպքում $\boldsymbol{A(x)\Rightarrow B(x)}$ ***ուղիղ պնդումը և նրա հակադարձի հակադիր*** $\boldsymbol{\neg B(x)\Rightarrow \neg A(x)}$ ***պնդումը կամ միաժամանակ ճշմարիտ են, կամ երկուսն էլ կեղծ են***:

Իրոք, եթե $A(x)\Rightarrow B(x)$ հետևությունը ճշմարիտ է, և $B(x)$-ը կեղծ է, ապա $A(x)$-ը նույնպես կեղծ է (եթե $A(x)$-ը ճշմարիտ լիներ, ապա $B(x)$-ը նույնպես ճշմարիտ կլիներ), այսինքն՝ $\neg B(x)\Rightarrow \neg A(x)$ հետևությունը նույնպես ճշմարիտ է:

Իսկ եթե ճշմարիտ է $\neg B(x)\Rightarrow \neg A(x)$ հետևությունը և $A(x)$-ը ճշմարիտ է, ապա $B(x)$-ը նույնպես ճշմարիտ է (հակառակ դեպքում $A(x)$-ը ճշմարիտ չէր լինի) այսինքն՝ $A(x)\Rightarrow B(x)$ հետևությունը նույնպես ճշմարիտ է:

Միաժամանակ են ճշմարիտ նաև հակադարձ (Բ) և հակադիր (Գ) պնդումները:

Եթե $A(x)\Rightarrow B(x)$ հետևությունը ճշմարիտ է, ասում են, որ $B(x)$-ն ***անհրաժեշտ պայման*** է $A(x)$-ի համար, իսկ եթե ճշմարիտ է $B(x)\Rightarrow A(x)$ հետևությունը, ասում են, որ $B(x)$-ը ***բավարար պայման*** է $A(x)$-ի համար:

Եթե ճշմարիտ են և՛ ուղիղ՝ $A(x)\Rightarrow B(x)$, և՛ հակադարձ՝ $B(x)\Rightarrow A(x)$ պնդումները, ապա $B(x)$-ն ***անհրաժեշտ և բավարար պայման*** է $A(x)$-ի համար: Այս դեպքում ասում են, որ $A(x)$-ը և $B(x)$-ը ***համարժեք*** են, այսինքն՝ ունենք ***համարժեքություն***՝

$$A(x)\Leftrightarrow B(x)\ :$$

Այսպիսով՝ $A(x)$-ը և $B(x)$-ը համարժեք են, եթե x-ի յուրաքանչյուր արժեքի դեպքում երկուսն էլ ճշմարիտ են կամ երկուսն էլ կեղծ են:

Օրինակ 3 (հիմնավորեք ինքնուրույն)։

ա) $x^2>9 \Leftrightarrow |x|>3$, բ) $\sqrt{x}<1 \Leftrightarrow 0<x<1$։

գ) Որպեսզի ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամի արժեքները լինեն դրական, անհրաժեշտ է, որ $a>0$։

դ) Որպեսզի ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամն ունենա արմատ, բավարար է, որ $ac<0$։

ե) Որպեսզի տեղի ունենա $\lg(x-1)>\cos x$ անհավասարությունը, անհրաժեշտ է, որ $x>1$։

զ) Որպեսզի տեղի ունենա $\lg(x-1)>\cos x$ անհավասարությունը, բավարար է, որ $x>11$։

Օրինակ 4: «Զուգահեռագիծն ուղղանկյուն է» և «Զուգահեռագծի անկյունագծերը հավասար են» պայմանները համարժեք են: Այս փաստը մաթեմատիկական տեքստերում կարող է ձևակերպվել նաև հետևյալ նախադասություններով.

ա) Որպեսզի զուգահեռագիծը լինի ուղղանկյուն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա անկյունագծերը լինեն հավասար:

բ) Զուգահեռագիծն ուղղանկյուն է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա անկյունագծերը հավասար են:

Նկատենք, որ « $A(x)$ -ը ճշմարիտ է այն և միայն դեպքում, երբ ճշմարիտ է $B(x)$ -ը» նախադասությունը տրամաբանորեն նշանակում է, որ $B(x) \Rightarrow A(x)$ և $\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)$, իսկ վերջին հետևությունը, ինչպես տեսանք, նույնն է, ինչ $A(x) \Rightarrow B(x)$ հետևությունը: Արդյունքում ունենում ենք՝ $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ։

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր պնդումն է կոչվում հետևություն:
2. Ի՞նչ մասերից է կազմված հետևությունը:
3. Ե՞րբ է փոփոխական պարունակող հետևությունը ճշմարիտ և ե՞րբ՝ կեղծ:
4. Բերեք հետևության օրինակ: Ձևակերպեք դրա հակադարձը, հակադիրը, հակադարձի հակադիրը:
5. Կարո՞ղ են արդյոք տրված պնդումը և դրա հակադարձը ճշմարիտ լինել, իսկ հակադիրը՝ կեղծ:
6. Ի՞նչ է նշանակում՝ անհրաժեշտ պայման:
7. Ի՞նչ է նշանակում՝ բավարար պայման:
8. Ի՞նչ է նշանակում՝ համարժեքություն, անհրաժեշտ և բավարար պայման:

Առաջադրանքներ

188. Գտեք հետևության ճշմարտային արժեքը.

ա) Եթե թիվը բաժանվում է 2-ի և 4-ի, ապա այն բաժանվում է 8-ի:

բ) Եթե թիվը բաժանվում է 8-ի, ապա այն բաժանվում է 2-ի և 4-ի:

գ) Եթե քառանկյունը զուգահեռագիծ է, ապա դրա անկյունագծերը հավասար են:

դ) Եթե քառանկյան անկյունագծերը հավասար են, ապա այն զուգահեռագիծ է:

Գրեք, թե ինչ է նշանակում տրված հետևության կեղծ լինելը և հիմնավորեք, որ այն կեղծ է (189-190).

189. ա) $x \in \mathbf{R} \Rightarrow x^2 > 0$, բ) $x \in \mathbf{R} \Rightarrow |x| > 0$,

գ) $x \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt{x^2} = x$, դ) $x \in \mathbf{R} \Rightarrow \lg x^2 = 2\lg x$:

➤ **190.** ա) Եթե A թվային բազմությունը սահմանափակ է, ապա այն ունի մեծագույն տարր:

բ) Եթե A թվային բազմությունը սահմանափակ է, ապա այն ունի փոքրագույն տարր:

Գրեք տրված հետևության հակադարձը, հակադիրը, հակադարձի հակադիրը և նշեք դրանց ճշմարտային արժեքները (191-193):

➤ **191.** ա) Եթե $a = b$, ապա $a^2 = b^2$, բ) Եթե $a^5 = b^5$, ապա $a = b$,

գ) Եթե $a > b$, ապա $a^7 > b^7$, դ) Եթե $a > 4$, ապա $\frac{1}{a} < \frac{1}{4}$:

➤ **192.** ա) $x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$, բ) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$,

գ) $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$, դ) $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$:

➤ **193.** ա) Եթե ABC եռանկյան մեջ $AB = BC$, ապա այդ եռանկյան BE կիսորդը և BH բարձրությունը համընկնում են:

բ) Եթե կետը պատկանում է ABC անկյան կիսորդին, ապա այն հավասարահեռ է ABC անկյան կողմերից:

գ) Եթե AD -ն ABC եռանկյան կիսորդն է, ապա $BD : DC = BA : AC$:

➤ **194.** Հետևյալ պնդումներից որո՞նք են ճշմարիտ և ո՞ր զույգերն են փոխհակադարձ կամ փոխհակադիր.

ա) Եթե գումարելիներից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 13-ի, ապա գումարը բաժանվում է 13-ի:

բ) Եթե գումարելիներից գոնե մեկը չի բաժանվում 13-ի, ապա գումարը չի բաժանվում 13-ի:

գ) Եթե գումարելիներից գոնե մեկը բաժանվում 13-ի, ապա գումարը բաժանվում 13-ի:

դ) Եթե գումարը բաժանվում է 13-ի, ապա գումարելիներից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 13-ի:

ե) Եթե գումարը չի բաժանվում 13-ի, ապա գումարելիներից ոչ մեկը չի բաժանվում 13-ի:

զ) Եթե գումարը չի բաժանվում 13-ի, ապա գումարելիներից գոնե մեկը չի բաժանվում 13-ի:

195. Հետևյալ պնդումներից որո՞նք են ճշմարիտ և ո՞ր զույգերն են փոխհակադարձ կամ փոխհակադիր.

ա) Եթե արտադրիչներից գոնե մեկը բաժանվում է 9-ի, ապա արտադրյալը բաժանվում է 9-ի, բ) Եթե արտադրիչներից ոչ մեկը չի բաժանվում է 9-ի, ապա արտադրյալը չի բաժանվում է 9-ի,

գ) Եթե արտադրյալը բաժանվում է 9-ի, ապա արտադրիչներից գոնե մեկը բաժանվում է 9-ի,

դ) Եթե արտադրյալը չի բաժանվում է 9-ի, ապա արտադրիչներից գոնե մեկը չի բաժանվում է 9-ի,

ե) Եթե արտադրյալը չի բաժանվում է 9-ի, ապա արտադրիչներից ոչ մեկը չի բաժանվում է 9-ի,

զ) Եթե արտադրիչներից գոնե մեկը չի բաժանվում է 9-ի, ապա արտադրյալը չի բաժանվում է 9-ի:

Աստղանիշի փոխարեն դրեք « $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ » նշաններից մեկը (196-200):

196. ա) $x(x-3)=0 * \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$, բ) $x^2-4=0 * \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$,

գ) $\cos x=1 * x=0$, դ) $x=2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}\ *\ \cos^2 x=1$:

➢ **197.** ա) $\lg x<1 * x<10$, բ) $\lg x>1 * x>10$,

գ) $\sqrt{x}<3 * x<9$, դ) $\sqrt{x}>3 * x>9$:

➢ **198.** ա) $\operatorname{tg} x>0 * x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, բ) $x\in(0,\pi) * \sin x>0$,

գ) $\operatorname{tg}x=1 * \sin x=\cos x$, դ) $|\operatorname{tg}x|>1 * |\sin x|>|\cos x|>0$:

➢ **199.** ա) $\sin x+\cos x=\sqrt{2} * \sin 2x=1$,

բ) $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) *$ « x-ը I քառորդում է»,

գ) « x-ը IV քառորդում է» $* x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$:

200. ա) «k-ն զույգ թիվ է» * «k-ի վերջին թվանշանը 2 է»:

բ) «a թիվը բաժանվում է 6-ի և 4-ի» * «a թիվը բաժանվում է 24-ի»:

գ) «a թիվը բաժանվում է 4-ի և 5-ի» * «a թիվը բաժանվում է 20-ի»:

դ) «a թիվը բաժանվում է 4-ի և 5-ի» * «a թիվը բաժանվում է 10-ի»:

201. Նշեք տրված պայմանի համար բավարար պայման.

ա) $a^2>b^2$, բ) $\sin x>0$, գ) $\log_a b>0$, ➢դ) $\sqrt{x}>x-1$:

202. Նշեք տրված պայմանի համար անհրաժեշտ պայման.

ա) ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամի արմատները դրական են:

բ) ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամի բոլոր արժեքները բացասական են:

Շարունակեք նախադասությունն այնպես, որ ստացվի ճշմարիտ պնդում (203-205):

203. ա) Որպեսզի եռանկյան որևէ գագաթից տարված միջնագիծն ու կիսորդը համընկնեն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ...:

բ) Եռանկյան որևէ գագաթից տարված միջնագիծն ու բարձրությունը համընկնում են այն և միայն այն դեպքում, երբ ... :

204. ա) Որպեսզի քառանկյանը հնարավոր լինի արտագծել շրջանագիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ...:

բ) Քառանկյանը հնարավոր է ներգծել շրջանագիծ այն և միայն այն դեպքում, երբ ...:

205. ա) Որպեսզի ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամն ունենա երկու արմատ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ...:

բ) Որպեսզի ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամի բոլոր արժեքները լինեն դրական, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ...:

* **206.** Օգտվելով համապատասխան սահմանումից՝ գրեք, թե ինչ է նշանակում՝

ա) $f(x)$, $x\in \mathbf{R}$ ֆունկցիան աճող չէ:

բ) $f(x)$, $x\in \mathbf{R}$ ֆունկցիան նվազող չէ:

գ) $f(x)$, $x\in \mathbf{R}$ ֆունկցիան մոնոտոն չէ:

Կրկնության համար

➢ **207.** Հավասարասրուն եռանկյան հիմքը 5 սմ է, դրան առընթեր անկյան կիսորդը՝ 6 սմ: Գտնել սրունքի երկարությունը:

➢ **208.** Գտնել $7\sqrt{3}$ սմ շառավղով շրջանին ներգծած եռանկյան մեծ կողմի երկարությունը, եթե մյուս երկու կողմերի երկարությունները 9 սմ և 15 սմ են:

§3. Դեդուկտիվ մտահանգում

Դեդուկցիան (լատ. *deductio* – արտածում) կամ ***դեդուկտիվ մտահանգումը*** մտածողության այնպիսի ձև է, երբ մասնավոր դրույթը դուրս է բերվում ընդհանուրից, դատողությունների շղթա, որի օղակները կապված են տրամաբանական կանոններով: Այդ շղթայի սկիզբը (***նախադրյալ***) որևէ ճշմարիտ դրույթ է (աքսիոմ, հայտնի փաստ և այլն), որից տրամաբանական դատողություններով (անհրաժեշտության դեպքում՝ կիրառելով նաև այլ ճշմարիտ փաստեր), հանգում են վերջնական դրույթին, որն անվանում են ***եզրակացություն***:

Օրինակ 1:

ա) Դիցուք՝ $\overline{abc}$ եռանիշ թվի թվանշանների գումարը բաժանվում է 9-ի՝ $a+b+c=9k$, $k\in \mathbf{N}$:

Ունենք՝ $\overline{abc}=100a+10b+c=99a+9b+a+b+c=9(11a+b+k)$:

Որեմն՝ $\overline{abc}$ թիվը բաժանվում է 9-ի:

Եզրակացություն՝ եթե եռանիշ թվի թվանշանների գումարը բաժանվում է 9-ի, ապա այդ թիվը բաժանվում է 9-ի:

բ) Եթե բնական թվի թվանշանների գումարը բաժանվում է 9-ի, ապա այդ թիվը բաժանվում է 9-ի:

$10^n+8,\ n\in \mathbf{N}$ տեսքի կամայական թվի թվանշանների գումարը 9 է, ինչը բաժանվում է 9-ի:

Հետևաբար՝ $10^n+8,\ n\in \mathbf{N}$, տեսքի կամայական թիվ բաժանվում է 9-ի:

գ) Կաքնասունների նորածին ձագերը սնվում են կաթով:

Շունը կաթնասուն է:

Հետևաբար՝ շան նորածին ձագերը սնվում են կաթով:

ա) դեպքում, ելնելով նախադրյալ փաստից ($\overline{abc}$ եռանիշ թվի թվանշանների գումարը բաժանվում է 9-ի), տրամաբանական դատողություններով հանգում ենք եզրակացությանը: բ) դեպքում այդ եզրակացությունն ինքն է հանդես գալիս որպես նախադրյալ:

Դժվար չէ նկատել, որ բ) և գ) մտահանգումները, լինելով բովանդակությամբ լիովին տարբեր, ունեն նույն տրամաբանական կառուցվածքը. երկուսն էլ ընդհանուր փաստը տարածում են մասնավոր դեպքի վրա: Նման մտահանգումները կոչվում են «փաստը կիրառելու» մտահանգումներ, որոնց տրամաբանական կառուցվածքը հետևյալն է.

$\forall x\in X\ \ (A(x)\Rightarrow B(x))$ – **մեծ նախադրյալ (ընդհանուր փաստ)**

$x_0\in X,\ \ A(x_0)$: – **փոքր նախադրյալ (մասնակի փաստ)**

Հետևաբար՝ $\boldsymbol{B(x_0)}$ – **եզրակացություն**

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում կիրառվում են դեդուկտիվ մտահանգման հետևյալ հիմնական կանոնները.

1. Բաժանման կանոն. $\dfrac{\boldsymbol{A,\ A\Rightarrow B}}{\boldsymbol{B}}$:

Եթե պնդի ունի A-ն և A-ից հետևում է B-ն, ապա պնդի ունի B-ն:

2. Բխեցման կանոն. $\dfrac{\boldsymbol{A\Rightarrow B,\ B\Rightarrow C}}{\boldsymbol{A\Rightarrow C}}$:

Եթե A-ից հետևում է B-ն, և B-ից հետևում է C-ն, ապա A-ից հետևում է C-ն:

Օրինակ 2: Եթե $3a+5$ թիվը ռացիոնալ է, ապա $3a=(3a+5)-5$ թիվը նույնպես ռացիոնալ է (ռացիոնալ թվերի տարբերությունը ռացիոնալ է):

Եթե $3a$ թիվը ռացիոնալ է, ապա $a=\frac{3a}{3}$ թիվը նույնպես ռացիոնալ է (ռացիոնալ թվերի քանորդը ռացիոնալ է):

Հետևաբար՝ եթե $3a+5$ թիվը ռացիոնալ է, ապա a թիվը նույնպես ռացիոնալ է:

3. Հակադրության կանոն. $\dfrac{A\Rightarrow B,\ \neg B}{\neg A}$ **:**

Եթե A-ից հետևում է B-ն, և B-ն տեղի չունի, ապա տեղի չունի A-ն:

Օրինակ 3: Եթե $a=3\sqrt{2}+5$ թիվը ռացիոնալ է, ապա $\sqrt{2}$ թիվը նույնպես ռացիոնալ է (տե՛ս 2-րդ օրինակը):

Սակայն $\sqrt{2}$-ը ռացիոնալ չէ:

Հետևաբար՝ $3\sqrt{2}+5$ թիվը ռացիոնալ չէ:

4. Փաստը կիրառելու կանոն. $\dfrac{\forall x\in X\ \ (A(x)\Rightarrow B(x))\qquad x_0\in X,\ A(x_0)}{B(x_0)}$:

Եթե A-ին բավարարող կամայական x-ի համար տեղի ունի B-ն և x_0-ն բավարարում է A-ին, ապա այն բավարարում է նաև B-ին (տե՛ս առաջին օրինակի բ) և գ) կետերը):

5. Լրիվ ինդուկցիայի կանոն.

S_1-ն օժտված է P հատկությամբ:

S_2-ն օժտված է P հատկությամբ:

....

S_k-ն օժտված է P հատկությամբ:

S_1-ը, S_2-ը, ..., S_k-ն սպառում են S-ը:

Հետևաբար՝ S-ն օժտված է P հատկությամբ:

Օրինակ 4: Դրական թվի քառակուսին դրական է:
Բացասական թվի քառակուսին դրական է:
Զրոյի քառակուսին զրո է:
Իրական թիվը կարող է լինել դրական, բացասական կամ զրո:

Հետևաբար՝ իրական թվի քառակուսին մեծ կամ հավասար է զրոյից:

6. Բացառման կանոն. $\dfrac{B_1\vee B_2\vee\ldots\vee B_k,\quad \neg B_1,\ \neg B_2,\ldots,\neg B_{k-1}}{B_k}$:

Օրինակ 5: Քննական թեստի առաջադրանքի ա), բ), գ), դ) պատասխաններից մեկը ճիշտ է:

ա), բ), դ) պատասխանները սխալ են:

Հետևաբար՝ գ) պատասխանը ճիշտ է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ի՞նչ է դեդուկտիվ մտահանգումը: Բերեք օրինակներ:
2. Բերեք փաստի տակ տանելու օրինակներ:
3. Նշեք բերված օրինակների մեծ, փոքր նախադրյալները և եզրակացությունը:
4. Նշեք դեդուկտիվ մտահանգման հիմնական կանոնները և բերեք օրինակներ:

Առաջադրանքներ

Հետևյալ մտահանգումներում լրացրեք բաց թողնված ասույթները և նշեք, թե դեդուկտիվ մտահանգման որ կանոնն է կիրառված (209-215):

209. ա) Եթե սեղանը հավասարասրուն է, ապա դրա հանդիպակաց անկյունների գումարը 180° է:

Եթե քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարը 180° է, ապա դրան կարելի է արտագծել շրջանագիծ:

Հետևաբար՝ ....:

բ) ....:

Եթե հավասարասրուն սեղանի հիմքերի գումարը հավասար է սրունքների գումարին, ապա միջին գիծը հավասար է սրունքին:

Հետևաբար՝ եթե հավասարասրուն սեղանին կարելի է ներգծել շրջանագիծ, ապա դրա միջին գիծը հավասար է սրունքին:

գ) Եթե կետը եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է, ապա այն հավասարահեռ է եռանկյան գագաթներից:

....:

Հետևաբար՝ եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը դրա միջնուղղահայացների հատման կետն է:

210. ա) $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}7 \Rightarrow \sin 2\alpha = 1{,}4$:

$\sin 2\alpha \neq 1{,}4$:

Հետևաբար՝ ....:

բ) $\sin\alpha = 0{,}9;\ \cos\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1{,}42$:

....:

Հետևաբար՝ գոյություն չունի α, որ $\sin\alpha = 0{,}9;\ \cos\alpha = 0{,}8$:

գ) ....:

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$:

Հետևաբար՝ գոյություն չունի α, որ $\operatorname{tg}\alpha = 2$; $\operatorname{ctg}\alpha = 3$:

211. ա) Կամայական զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմերը հավասար են:

AD -ն և BC -ն զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմեր են:

Հետևաբար՝ ....:

բ) Եռանկյունը, որի երկու կողմերը հավասար են, հավասարասրուն է:

AOC եռանկյունում $AO = OC$:

Հետևաբար՝ ....:

212. ա) Հակադիր անկյունները հավասար են:

....:

Հետևաբար՝ A և B անկյունները հավասար են:

բ) Կից անկյունների գումարը 180^0 է:

....:

Հետևաբար՝ A և B անկյունների գումարը 180^0 է:

213. ա) ....:

A և B անկյունները հակադիր են

Հետևաբար՝ A և B անկյունները անկյունները հավասար են:

բ) . ...:

A և B անկյունները կից են:

Հետևաբար՝ A և B անկյունների գումարը 180^0 է:

214. ա) Դրական թվի մոդուլը դրական է:

....:

Զրոյի մոդուլը զրո է:

Իրական թիվը կարող է լինել դրական, բացասական կամ զրո:

Հետևաբար՝ իրական թվի մոդուլը մեծ կամ հավասար է զրոյից:

բ) Եթե $a \geq 0$, ապա $\dfrac{a+|a|}{2} = a = \max\{a,0\}$:

....:

Հետևաբար՝ կամայական $a \in \mathbf{R}$ թվի համար՝ $\max\{a,0\} = \dfrac{a+|a|}{2}$:

215. Ուղիղները տարածության մեջ կարող են լինել զուգահեռ, հատվող կամ խաչվող:

a և b ուղիղները զուգահեռ չեն և չեն խաչվում

Հետևաբար՝ ....:

➢**216.** Հիմնավորեք ասույթի ճշմարտացիությունը և նշեք, թե դեդուկտիվ մտահանգման որ կանոնից եք օգտվել.

ա) Եթե մի հարթության վրա գտնվող երեք ուղիղներից c ուղիղը հատում է a և b զուգահեռ ուղիղներից մեկը, ապա հատում է նաև մյուսը:

բ) Եթե α հարթությունը հատում է β և γ զուգահեռ հարթություններից մեկը, ապա ապա հատում է նաև մյուսը:

գ) Եթե $AB + BC = AC$, ապա B-ն պատկանում է AC հատվածին:

դ) Եթե $AB + BC = AC$, ապա C-ն պատկանում է AB ուղղին:

ե) Շրջանագծին ներգծյալ անկյունը չափվում է իր հենման աղեղի կեսով:

զ) Եթե քառանկյան երկու կողմերն իրար զուգահեռ են և անկյունագծերը՝ հավասար, ապա քառանկյան մյուս երկու կողմերն իրար հավասար են:

Կրկնության համար

217. Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որոնք են զույգ, որոնք՝ կենտ.

ա) $y=\dfrac{\lg x^2-4}{\lg x^6+1}$, բ) $y=\dfrac{x^3\lg|x|}{2x^8+9}$, գ) $y=\dfrac{5^x+5^{-x}}{(x^3-x)^5}$, դ) $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{6^{-x}-6^x}$:

218. Ապացուցել, որ հետևյալ ֆունկցիաները ո՛չ զույգ են, ո՛չ կենտ.

ա) $y=\dfrac{2\lg x-x^2}{x^2-2}$, բ) $y=\dfrac{x^3\lg x}{3x^4+5}$, գ) $y=\dfrac{5^x+5^{-x}}{(2x-1)^6}$, դ) $y=\dfrac{3^x+1}{3^{-x}-1}$:

§4. Ինդուկտիվ մտահանգում

Շրջակա աշխարհի ճանաչումը մարդն սկսել է առանձին առարկաների, երևույթների ուսումնասիրությունից: Ելնելով մասնակի դեպքերի քննարկումից, մարդը հանգել է ընդհանուր օրենքների՝ կոնկրետ փաստերից գնալով դեպի ընդհանուր դատողությունները:

Բնագիտական առարկաներ ուսումնասիրելիս հավանաբար նկատել եք, որ շատ եզրակացություններ արվում են միայն փորձերի և դիտարկումների հիման վրա:

Օրինակ 1: Դ. Ի. Մենդելեևը, ուսումնասիրելով առանձին քիմիական տարրերի հատկությունները, նկատեց որոշակի օրինաչափություններ և բացահայտեց քիմիական տարրերի պարբերական աղյուսակը, որն այժմ կրում է նրա անունը:

Ուսումնասիրելով ջրում ընկղմված առանձին առարկաները, Արքիմեդը հայտնագործեց իր օրենքը՝ հեղուկում ընկղմված մարմինը դուրս է մղվում մի ուժով, որի մեծությունը հավասար է իր դուրս մղած հեղուկի կշռին:

Ինդուկցիան (լատ. inductio – հանգեցում) մտածողության այնպիսի ձև է, որը մասնավոր դեպքերը հանգեցնում է ընդհանուր եզրակացության, և ընդհանուր դրույթը դուրս է բերվում մասնավորից:

Այս եղանակով ստացված պնդումներն անվանում են ***ինդուկցիոն եզրակացություններ***, իսկ դատողությունները, որոնք բերում են ինդուկցիոն եզրակացությունների՝ ***ինդուկցիոն դատողություններ***:

Օրինակ 2: Երեքի չբաժանվող n բնական թիվը 3 -ի բաժանելիս կարող է ստացվել 1 կամ 2 մնացորդ:

Եթե մնացորդը 1 է, ապա $n=3k+1$, որտեղ k -ն բնական թիվ է, ուստի

$$n^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1:$$

Եթե մնացորդը 2 է, ապա $n=3k+2$, և

$$n^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1:$$

Երկու դեպքում էլ ստացված թիվը 3-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ:

Հետևաբար՝ 3-ի չբաժանվող թվի քառակուսին 3-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ:

Քննարկելով մասնավոր դեպքերը՝ հանգեցինք ընդհանուր եզրակացության: Այն ճշմարիտ է, քանի որ քննարկվել են բոլոր մասնավոր դեպքերը: Մտահանգման այս եղանակը կոչվում է ***լրիվ ինդուկցիա***: Դրա հիմքում ընկած է դեդուկտիվ մտահանգման լրիվ ինդուկցիայի կանոնը, որը քննարկեցինք նախորդ պարագրաֆում: Լրիվ ինդուկցիան կիրառվում է, երբ ընդհանուր պնդումը տրոհվում է մի քանի մասնավոր դեպքի և քննարկվում են ***բոլոր*** հնարավոր դեպքերը:

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ կամայական բնական n -ի դեպքում $n(n+1)(n+2)$ -ը բաժանվում է 3-ի:

Կամայական բնական թիվ 3-ի բաժանելիս կարող է ստացվել 0,1 կամ 2 մնացորդ:

Եթե n -ը 3-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ, ապա $(n+2)$ -ը, ուստի նաև $n(n+1)(n+2)$ -ը բաժանվում է 3-ի:

Եթե n -ը 3-ի բաժանելիս ստացվում է 2 մնացորդ, ապա $(n+1)$ -ը, ուստի նաև $n(n+1)(n+2)$ -ը բաժանվում է 3-ի:

Եթե n -ը բաժանվում է 3-ի (ստացվում է 0 մնացորդ), ապա $n(n+1)(n+2)$ -ը բաժանվում է 3-ի:

Հետևաբար՝ կամայական բնական n -ի դեպքում $n(n+1)(n+2)$ -ը բաժանվում է 3-ի:

Օրինակ 4: 9-րդ դասարանի դասընթացում, օգտվելով թվաբանական պրոգրեսիայի սահմանումից, ստացել ենք՝

$$a_2=a_1+d\ ,\ a_3=a_1+2d\ ,\ a_4=a_1+3d\ ,\ a_5=a_1+4d\ ,$$

որից հետո եզրակացրել ենք, որ ճիշտ է ընդհանուր անդամի բանաձևը՝ $a_n=a_1+(n-1)d$

կամայական բնական n-ի համար:

Այսպիսով, դիտարկելով չորս օրինակ (մասնավոր դեպք), մենք եկանք ընդհանուր եզրակացության: Արդյո՞ք ճիշտ է նման եզրահանգումը: Քանի որ դիտարկված օրինակները չեն ընդգրկում բոլոր հնարավոր դեպքերը, արված եզրակացությունը կարող է լինել միայն ենթադրություն (վարկած):

Մասնավոր (ոչ բոլոր) օրինակների դիտարկման հիման վրա արված եզրակացությունը կոչվում է ***թերի ինդուկցիա:*** Դիտարկված օրինակում թերի ինդուկցիայի մեթոդով ստացված եզրակացությունը ճշմարիտ է (տե՛ս 4-րդ գլխի 2-րդ պարագրաֆի 1-ին օրինակը): Այժմ բերենք օրինակ, երբ թերի ինդուկցիան հանգեցնում է սխալ եզրահանգման:

Օրինակ 5: Դիտարկենք $f(n)=n^2+n+41$, $n\in \mathbf{N}$, ֆունկցիան և հաշվենք նրա մի քանի արժեքներ՝ $f(1)=43$, $f(2)=47$, $f(3)=53$, $f(4)=61$, $f(5)=71$: Նկատելով, որ ստացված թվերը պարզ են, կարող ենք ենթադրել, որ այս ֆունկցիայի բոլոր արժեքները պարզ թվեր են: Սակայն թերի ինդուկցիայի վրա հիմնված մեր այս եզրահանգումը սխալ է, քանի որ $f(41)=41\cdot 43$, որը բաղադրյալ է:

Օրինակ 6: XVII դարի ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Պիեռ Ֆերման դիտարկել է հետևյալ հավասարությունները.

$$2^{2^1}+1=5,\quad 2^{2^2}+1=17,\quad 2^{2^3}+1=257,\quad 2^{2^4}+1=65537$$

և նկատել, որ ստացված $5,\ 17,\ 257,\ 65537$ թվերը պարզ թվեր են: Ֆերման առաջադրել է վարկած (և համոզված է եղել նրա ճշմարտացիության մեջ), որ կամայական բնական n-ի դեպքում $2^{2^n}+1$ թիվը պարզ թիվ է: Սակայն XVIII դարում մեծանուն մաթեմատիկոս Լեոնարդ Էյլերը պարզեց, որ $n=5$ դեպքում $2^{2^5}+1$ թիվը բաղադրյալ է, այն բաժանվում է 641-ի:

Սակայն սրանով չի նսեմանում թերի ինդուկցիայի դերը: Որպես մտածողության ձև այն հիմնականում կիրառվում է վարկած ձևակերպելու համար, որի ճիշտ կամ սխալ լինելն այնուհետև հիմնավորվում է այս կամ այն եղանակով: Այս իմաստով գիտության զարգացման պատմության մեջ թերի ինդուկցիայի դերն անգնահատելի է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Մտածողության ո՞ր ձևն է կոչվում ինդուկցիա:
2. Թվարկեք ինդուկցիայի տեսակները:
3. Ի՞նչ է լրիվ ինդուկցիան: Բերեք օրինակ:
4. Ի՞նչ է թերի ինդուկցիան: Բերեք օրինակ:
5. Հավաստի՞ է արդյոք թերի ինդուկցիայի կիրառմամբ ստացված եզրակացությունը:

219. Լրիվ ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք.

ա) Բնական թվի քառակուսու վերջին թվանշանը 1, 4, 5, 6, 9, 0 թվանշաններից որևէ մեկն է:

բ) Կամայական բնական n-ի դեպքում $n(n+1)(2n+1)$ թիվը բաժանվում է 6-ի:

գ) Կամայական բնական n-ի դեպքում (n^2+2n+3)-ը չի բաժանվում 7-ի:

Կիրառելով լրիվ ինդուկցիա՝ հիմնավորեք պնդումը (220-222):

220. ա) Կամայական x թվի համար $x+|x|\geq 0$:

բ) Կամայական a և b թվերի համար $|a-b|\geq|a|-|b|$:

գ) Կամայական a և b թվերի համար $\max\{a,b\}=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$:

դ) Կամայական a և b թվերի համար $\min\{a,b\}=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$:

➢**221.** ա) 3-ի չբաժանվող բնական թվերի քառակուսիների տարբերությունը բաժանվում է 3-ի:

գ) Ամբողջ թվի քառակուսին 4-ի բաժանելիս չի կարող ստացվել 2 մնացորդ:

դ) Ամբողջ թվի քառակուսին 5-ի բաժանելիս չի կարող ստացվել 3 մնացորդ:

➢**222.** Կամայական բնական n-ի դեպքում.

ա) $n(2n^2-3n+1)$-ը բաժանվում է 6-ի,

բ) n^5-n -ը բաժանվում է 5-ի,

գ) n^7-n -ը բաժանվում է 7-ի,

դ) $n^{4k+1}-n$ -ը բաժանվում է 10-ի, որտեղ $k\in\mathbf{N}$:

* **223.** Լրիվ ինդուկցիայի մեթոդով գտեք տրված հավասարման ամբողջ լուծումը նշված միջակայքում.

ա) $x^2-24x+108=0$, $(15;21)$,

բ) $x^3+2x^2-21x+18=0$, $[-9;-5]$,

գ) $\sin\dfrac{\pi x}{2}-x=4$, $[-5;1]$,

դ) $x^5-7^x+33x+1=0$, $(0;5)$:

224. Հաշվելով հետևյալ գումարները՝ գտեք օրինաչափությունը և ձևակերպեք վարկած.

ա) $1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ 1+3+5+7,\ \ldots,$

բ) $\dfrac{1}{1\cdot 2},\ \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3},\ ,\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4},\ldots,$

➢գ) $\dfrac{1}{1\cdot 3},\ \dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4},\ \dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5},\ldots$:

225. Հարթության վրա քանի՞ կետում են հատվում զույգ առ զույգ հատվող n ուղիղները, եթե յուրաքանչյուր կետով անցնում է ամենաշատը երկու ուղիղ և՝

ա) $n=2$, բ) $n=3$, գ) $n=4$, դ) $n=5$:

Կիրառեք թերի ինդուկցիա և ձևակերպեք վարկած:

226. Կիրառեք թերի ինդուկցիա և ձևակերպեք վարկած.

ա) $6^2=36,\ \ 6^3=216,\ \ 6^4=1296,\ldots$

բ) $2^1=2,\ \ 2^2=4,\ \ 2^3=8,\ \ 2^4=16,\ \ 2^5=32,\ldots$

գ) $7^1=7,\ \ 7^2=49,\ \ 7^3=343,\ \ 7^4=2401,\ \ 7^5=16807,\ldots$

դ) $15^2=225,\ \ 25^2=625,\ \ 35^2=1225,\ldots$

➢**227.** Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ պատասխանեք հետևյալ հարցերին.

ա) որո՞նք են 1225^{1224} թվի վերջին երկու թվանշանները,

բ) ի՞նչ թվանշանով է վերջանում $36^{36}+6^{12}-216^5$ թիվը,

գ) ո՞րն է 2^{2222}-ի վերջին թվանշանը,

դ) ($7^{3425}-7^{3405}$)-ը բաժանվու՞մ է 10-ի,

ե) $6^{348}+2^{102}$ բաժանվու՞մ է 10-ի:

Կրկնության համար

➢**228.** Ապացուցեք, որ ֆունկցիան պարբերական է.

ա) $y=\sin 3x+\cos 1{,}5x$, բ) $y=4\sin 1{,}2x+2\cos 7x$,

գ) $y=\sin 6{,}7x+\operatorname{tg} 8{,}9x$, դ) $y=\sin 1{,}2x+\sin 3{,}4x+\sin 4{,}5x$:

* **229.** Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը.

ա) $y=\dfrac{2^{\sin x}-2^{-\sin x}}{\cos x}$, բ) $y=\dfrac{7^{\cos x}-7^{-\cos x}}{\sin x}$,

գ) $y=\dfrac{3^{1+\cos x}+3^{1-\cos x}-10}{2\operatorname{tg} x+7}$, դ) $y=\dfrac{5^{1+\sin x}+5^{1-\sin x}-26}{6\operatorname{ctg} x-9}$:

§5. Ապացուցում և հերքում: Ապացուցման և հերքման հիմնական մեթոդները

Թեորեմները և այլ պնդումները, որ ապացուցում ենք մաթեմատիկայի դասընթացում, որպես կանոն կարելի է ներկայացնել «Եթե A, ապա B» հետևության տեսքով, որտեղ A-ն կոչվում է ***պայման***, իսկ B-ն՝ ***հետևանք***: Ապացուցել նման պնդման ճշմարտացիությունը նշանակում է՝ ցույց տալ, որ եթե A-ն ճշմարիտ է, ապա ճշմարիտ է նաև B-ն: Հերքել պնդումը նշանակում է՝ ցույց տալ, որ կա դեպք, երբ A-ն ճշմարիտ է, իսկ B-ն՝ կեղծ: Պնդումների ապացուցման կամ հերքման հիմքում ընկած են տրամաբանական դատողությունները և դրանց հիմնավորման եղանակները շատ բազմազան են: Այստեղ կներկայացնենք ապացուցման և հերքման հիմնական մեթոդները: Սակայն նկատենք, որ դատողությունների բաժանումը ապացուցման և հերքման պայմանական է, քանի որ հերքել որևէ պնդում, ըստ էության նույնն է, թե ապացուցել այդ պնդման ժխտումը:

1. Համադրման մեթոդը: Դպրոցական դասընթացում առավել հաճախ է հանդիպում ապացուցման ուղիղ եղանակը, երբ տրամաբանական դատողություններն ընթանում են պայմանից դեպի եզրակացություն: Ապացուցման այդ ձևն անվանում են ***համադրման մեթոդ***:

Օրինակ 1: Եթե a-ն և b-ն ոչ բացասական թվեր են, ապա $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$: Ապացուցենք այս պնդումը:

Ապացուցման քայլեր	*Փաստարկներ*
1. $a, b \in \mathbf{R},\ a \geq 0,\ b \geq 0$	պայման
2. $\sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbf{R}$	արմատի հատկություն
3. $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$	իրական թվի քառակուսու հատկություն
4. $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$	տարբերության քառակուսին
5. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$	անհավասարության հատկություն
6. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	անհավասարության հատկություն

Ապացուցման այս մեթոդի գլխավոր դժվարությունն առաջին քայլի ընտրությունն է: Այն դեպքում, երբ խնդիր լուծողը չի կռահում, թե ինչից սկսել, պետք է փորձի վերլուծել եզրակացությունը, հասկանալ. ի՞նչ է պետք ապացուցել (մեր օրինակում՝ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$), ի՞նչ փաստից կարելի է այն ստանալ ($a + b \geq 2\sqrt{ab}$ անհավասարությունից), իսկ այդ փաստն ինչի՞ց է հետևում և այլն: Այս դատողությունները մեր օրինակում հանգեցնում են համարժեքությունների հետևյալ շղթային՝

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0:$$

Քանի որ վերջին անհավասարությունը ճշմարիտ է, ուրեմն մենք գտել ենք լուծման բանալին և կարող ենք շարադրել ապացույցը, ինչպես դա արեցինք վերևում: Ապացույցի նման եղանակն անվանում են ***վերլուծական-համադրման մեթոդ***:

2. Հակասող ենթադրության (հակասության) մեթոդը: Այս մեթոդը նույնպես հաճախ է կիրառվում մաթեմատիկայում, հատկապես՝ երկրաչափական պնդումներ ապացուցելիս: Նկարագրենք մեթոդի էությունը: Ենթադրում ենք, որ պնդումը, որ ուզում ենք ապացուցել, սխալ է: Եթե այս ենթադրությունը տրամաբանական դատողությունների միջոցով հանգեցնում է հակասության (պայմանի կամ որևէ ճշմարիտ փաստի ժխտմանը), եզրակացնում ենք, որ մեր ենթադրությունը սխալ է, այսինքն՝ տրված պնդումը ճշմարիտ է:

Փաստորեն, A պնդման ճշմարտացիությունն ապացուցելու փոխարեն ապացուցում ենք, որ նրա ժխտումը սխալ է, ինչը, երրորդի բացառման օրենքի համաձայն, համարժեք է A-ի ճշմարիտ լինելուն:

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ $\sqrt{5}$ թիվն իռացիոնալ է:

Ենթադրենք հակառակը՝ $\sqrt{5}$-ը ռացիոնալ է: Այդ դեպքում այն կարելի է ներկայացնել որպես անկրճատելի կոտորակ՝ $\sqrt{5}=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbf{N}$, որտեղից՝

$$5=\frac{m^2}{n^2}\Rightarrow 5n^2=m^2\Rightarrow m=5k,\ k\in\mathbf{N}\Rightarrow 5n^2=25k^2\Rightarrow n^2=5k^2\Rightarrow n=5p,\ p\in\mathbf{N}:$$

Ստացվեց հակասություն. m-ը և n-ը բաժանվում են 5-ի, մինչդեռ $\frac{m}{n}$ կոտորակն անկրճատելի էր: Ուրեմն մեր ենթադրությունը սխալ է, այսինքն՝ $\sqrt{5}$-ն իռացիոնալ է:

Առօրյա խոսակցություններում նույնպես ինչ-որ բան հիմնավորելու համար հաճախ դիմում ենք հակասող ենթադրության մեթոդին: Օրինակ ասում ենք՝ Երևանում շատ են անկարգապահ վարորդները (պնդում), եթե նրանք շատ չլինեին (հակասող ենթադրություն) վթարներ քիչ կլինեին, մինչդեռ ամեն օր բազմաթիվ վթարներ են լինում (հակասություն):

Հակասող ենթադրության մեթոդից հաճախ են օգտվում փաստաբանները: Օրինակ, փաստաբանն իր պաշտպանյալի անմեղությունը (պնդում) կարող է հիմնավորել հետևյալ կերպ. եթե մեղադրյալը լիներ հանցագործության վայրում (հակասող ենթադրություն) , նա չէր կարող հինգ րոպե անց գտնվել քաղաքի մյուս ծայրի սրճարանում, մինչդեռ այդ պահին սրճարանում նրան տեսել են մի քանի վկաներ (հակասություն):

Օրինակ 3: Բերենք հակասող ենթադրության մեթոդի կիրառման մի հետաքրքիր օրինակ ֆիզիկայից: Այդ մեթոդով իտալացի հայտնի գիտնական Գալիլեո Գալիլեյը հիմնավորել է, որ անօդ տարածությունում բոլոր մարմինները, անկախ իրենց ծանրությունից, միաժամանակ են ընկնում գետնին: Մինչև Գալիլեյը ճշմարիտ էր համարվում Արիստոտելի պնդումը՝ անօդ տարածությունում ծանր մարմիններն ընկնում են թեթևներից արագ:

Գալիլեյի ապացույցը հետևյալն է: Ենթադրենք Արիստոտելը ճիշտ է: Վերցնենք մինևույն չափսերով երկու իրար կապված ձող, մեկը՝ փայտից, մյուսը՝ երկաթից: Քանի որ երկաթը փայտից ծանր է, այն ավելի արագ է ընկնում, քան փայտը: Ուրեմն փայտյա ձողը «խանգարում» է երկաթյա ձողին, և իրար կապված ձողերն ***ավելի դանդաղ են ընկնում***, քան միայն երկաթյա ձողը: Սակայն մյուս կողմից, իրար կապված ձողերն ավելի ծանր են, քան միայն երկաթյա ձողը, ուստի ***ավելի արագ են ընկնում*** նրանից: Ստացված հակասությունն ապացուցում է, որ Արիստոտելը սխալ է:

Հանգունորեն կարող եք հիմնավորել, որ թեթև մարմինը ծանրից ավելի արագ չի ընկնում գետին: Կարծում ենք նաև, որ ֆիզիկայից ձեր գիտելիքները թույլ կտան հիմնավորել, թե ինչու է քարը փետուրից արագ ընկնում:

3. Բացառման մեթոդը: Այս մեթոդը հիմնվում է բացառման կանոնի վրա, որը դիտարկել ենք 3-րդ պարագրաֆում:

Օրինակ 4: Դիցուք f ֆունկցիան աճող է թվային առանցքի վրա, և

$$f(x_1) < f(x_2): \qquad (1)$$

Ցույց տանք, որ $x_1 < x_2$:

Հնարավոր է երեք դեպք՝ $x_1 > x_2$ (B_1), $x_1 = x_2$ (B_2), $x_1 < x_2$ (B_3):

Եթե $x_1 > x_2$, ապա, քանի որ ֆունկցիան աճող է, $f(x_1) > f(x_2)$, ինչը հակասում է (1)-ին: Ուրեմն՝ B_1-ը սխալ է:

Եթե $x_1 = x_2$, ապա $f(x_1) = f(x_2)$, ինչը նույնպես հակասում է (1)-ին: Ուրեմն՝ B_2-ը նույնպես սխալ է:

Հետևաբար՝ ճշմարիտ է B_3-ը, այսինքն՝ $x_1 < x_2$:

Բացառման մեթոդի կիրառությանը հաճախ ենք հանդիպում նաև առօրյա կյանքում: Օրինակ՝ կորցրած գիրքը տանը փնտրելիս մտածում ենք. այն կարող էր լինել տան պահարանում, պայուսակում կամ դպրոցում: Քանի որ պահարանում և պայուսակում գիրքը չկա, ուրեմն՝ մոռացել եմ դպրոցում:

4. Դիրիխլեի սկզբունքը: Պնդումների ապացուցման այս եղանակը կարելի է հասկանալ հետևյալ օրինակներով:

ա) Եթե 8 վանդակում կա 9 ոռխակ, ապա գոնե մի վանդակում կա մեկից ավելի ոռխակ:

բ) Հնարավոր չէ 16 գործիքը դասավորել 3 դարակում այնպես, որ յուրաքանչյուր դարակում լինի 5-ից ոչ ավելի գործիք:

գ) Եթե 6 վրանում քնած է 21 մարդ, ապա կա վրան, որտեղ քնած է առնվազն 4 մարդ:

Այս սկզբունքի ճշմարտացիության մեջ հեշտությամբ կարելի է համոզվել հակասող ենթադրության մեթոդով: Օրինակ՝ եթե յուրաքանչյուր վրանում լինի ամենաշատը 3 մարդ, ապա 6 վրանում քնած մարդկանց քանակը չի գերազանցի 18-ը, ինչը հակասում է պայմանին, որ վրաններում քնած է 21 մարդ:

Օրինակ 5: Ապացուցենք, որ կամայական 11 բնական թվերի մեջ կգտնեն երկուսը, որոնց տարբերությունը բաժանվում է 10-ի:

Քանի որ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 թվանշանների (վրանների) քանակը 10 է, ուրեմն տրված 11 բնական թվերի (մարդկանց) մեջ կգտնվեն երկուսը, որոնք վերջանում են նույն թվանշանով: Այդ երկու թվերից մեծի ու փոքրի տարբերությունը կբաժանվի 10-ի:

Օրինակ 6: Ապացուցենք, որ Երևանում կգտնվեն 3 մարդ, որոնք ունեն նույն թվով մազեր:

Հայտնի է, որ մարդու մազերի թիվը (վրանների թիվը) չի գերազանցում 500000-ը, իսկ Երևանի բնակիչների թիվը (մարդկանց թիվը) մեկ միլիոնից ավելի է: Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն կգտնվի 3 մարդ, ովքեր ունեն նույն քանակությամբ մազեր:

5. Հակաօրինակ: Մաթեմատիկայի դասընթացը հիմնականում կազմված է զանազան պնդումների հիմնավորումից: Սակայն երբեմն հարկ է լինում հերքել տրված պնդումը, ցույց տալ, որ այն սխալ է:

Օրինակ 7: ա) «Կամայական իրական թվի քառակուսին դրական է»:

Այս պնդումը սխալ է: Իրոք, 0-ն իրական թիվ է, սակայն նրա քառակուսին 0 է, այսինքն՝ ոչ բոլոր իրական թվերի քառակուսիներն են դրական, կա (գոյություն ունի) թիվ, որի քառակուսին դրական չէ:

բ) «Կամայական ֆունկցիա զույգ է կամ կենտ»:

Այս պնդումը սխալ է, քանի որ կա ֆունկցիա (օրինակ՝ $y = x - 1$), որը ո՛չ զույգ է, ո՛չ կենտ:

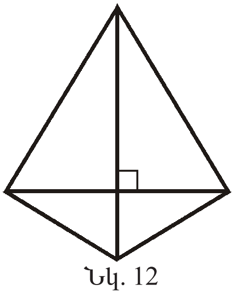
գ) «Բոլոր պարզ թվերը կենտ են» պնդումը սխալ է: Օրինակ՝ 2-ը պարզ թիվ է, սակայն կենտ չէ:

Բերված երեք պնդումների սխալ լինելը հիմնավորեցինք օրինակի միջոցով, գտանք մասնավոր դեպք, երբ պնդումը սխալ է: Այսպիսի օրինակը կոչվում է ***հակաօրինակ***:

Օրինակ 8: «Եթե քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, ապա այն շեղանկյուն է»:

Այս պնդումը հերքելու համար բավական է բերել հակաօրինակ, նշել քառանկյուն, որի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, սակայն այն շեղանկյուն չէ (նկ. 12):

Իհարկե ոչ բոլոր պնդումներն են, որ կարելի է հերքել հակաօրինակի միջոցով:



Նկ. 12

Օրինակ 9: «Գոյություն չունի այնպիսի α, որ $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}51$»:

Որքան էլ α-ների օրինակներ դիտարկենք և տեսնենք, որ $\sin\alpha\cos\alpha$-ն 0,51 չի ստացվում, պնդումը հերքած չենք լինի: Այն հերքելու համար պետք է հիմնավորենք, որ ***կամայական*** α-ի դեպքում $\sin\alpha\cos\alpha$-ն հավասար չէ 0,51: Իրոք, եթե որևէ α-ի դեպքում $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}51$, ապա $\sin 2\alpha = 1{,}02$, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ կամայական անկյան սինուսը փոքր է 1-ից: Պնդումը հերքեցինք հակասող ենթադրության մեթոդով:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է ապացուցման համադրման մեթոդը:
2. Նկարագրեք հակասող ենթադրության մեթոդը:
3. Բերեք առօրյա կյանքում հակասող ենթադրության մեթոդի կիրառության օրինակներ:
4. Ո՞րն է ապացուցման բացառման մեթոդը: Ի՞նչ կանոն է ընկած նրա հիմքում:
5. Նկարագրեք Դիրիխլեի սկզբունքը:
6. Ի՞նչ է նշանակում՝ հակաօրինակ:

Առաջադրանքներ

Հիմնավորեք հակասող ենթադրության մեթոդով (230-233):

230. ա) Եթե քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց չեն, ապա այն շեղանկյուն չէ:

բ) Եթե քառանկյան հանդիպակաց կողմերի գումարներն իրար հավասար չեն, ապա այդ քառանկյանը հնարավոր չէ արտագծել շրջանագիծ:

գ) Եթե քառանկյան հանդիպակաց անկյունների գումարներն իրար հավասար չեն, ապա այդ քառանկյանը հնարավոր չէ ներգծել շրջանագիծ:

➢**231.** ա) Եթե թվի քառակուսին 8-ով վերջացող բնական թիվ է, ապա այդ թիվն իռացիոնալ է:

բ) Եթե թվի քառակուսին 3-ով վերջացող բնական թիվ է, ապա այդ թիվն իռացիոնալ է:

գ) Եթե բնական թվի քառակուսին զույգ է, ապա այդ թիվը զույգ է:

դ) Եթե բնական թվի քառակուսին բաժանվում է 5 -ի, ապա այդ թիվը բաժանվում է 5-ի:

232. ա) Եթե երկու բնական թվերի գումարը հավասար է 55-ի, ապա գումարելիներից մեկը փոքր է 28-ից,

բ) Եթե 10 թվերի գումարը 72 է, ապա գումարելիներից գոնե մեկը մեծ է 7-ից:

գ) Եթե երեք դրական թվերի արտադրյալը հավասար է 124, ապա նրանցից գոնե մեկը փոքր է 5-ից:

դ) Եթե երեք դրական թվերի արտադրյալը հավասար է 218, ապա նրանցից գոնե մեկը մեծ է 6-ից:

➢**233.** ա) Եթե $b_7 \cdot b_{11} < 0$, ապա $\{b_n\}$ հաջորդականությունը երկրաչափական պրոգրեսիա չէ:

բ) $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$ և $\sqrt{13}$ թվերը չեն կարող լինել որևէ թվաբանական պրոգրեսիայի երեք հաջորդական անդամներ:

գ) $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$ և $\sqrt{13}$ թվերի k, $k \neq 2$, աստիճանները չեն կարող լինել որևէ թվաբանական պրոգրեսիայի երեք հաջորդական անդամներ:

դ) 1, $\sqrt{2}$ և 2 թվերը չեն կարող լինել որևէ թվաբանական պրոգրեսիայի անդամներ:

ե) Եթե $\dfrac{a_1-a_2}{a_1-a_3}$-ը իռացիոնալ է, ապա a_1, a_2, a_3 թվերը չեն կարող լինել որևէ թվաբանական պրոգրեսիայի անդամներ:

* **234.** Հակասող ենթադրության մեթոդով հիմնավորեք, որ

ա) Վանդակավոր թղթի վրա հնարավոր չէ նկարել այնպիսի հավասարակողմ եռանկյուն, որի գագաթները ընկած լինեն վանդակների գագաթներում:

բ) Կոորդինատային հարթության վրա չկա այնպիսի հավասարակողմ եռանկյուն, որի գագաթների կոորդինատները լինեն ռացիոնալ թվեր:

235. Տրված են ճշմարիտ պնդումներ.

ա) Եթե եռանկյունը բութանկյուն է, ապա նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է եռանկյունուց դուրս:

բ) Եթե եռանկյունն ուղղանկյուն է, ապա նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը պատկանում է կողմերից մեկին:

գ) Եթե եռանկյունը սուրանկյուն է, ապա նրան արտագծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է եռանկյան ներսում:

Ձևակերպեք այս պնդումների հակադարձները և հիմնավորեք բացառման մեթոդով:

➢**236.** Բացառման մեթոդով գտեք, թե քանի անկյուն ունի A ուռուցիկ բազմանկյունը, եթե հայտնի է, որ՝

ա) A-ի ներքին անկյունների գումարը փոքր է 500°-ից, և A-ին հնարավոր չէ արտագծել շրջանագիծ,

բ) A-ի ներքին անկյունների գումարը փոքր է 2000°-ից, և A-ի անկյունագծերի և կողմերի քանակները զույգ են,

գ) A-ի ներքին անկյունների գումարը փոքր է 500°-ից, և A-ին հնարավոր չէ ներգծել շրջանագիծ:

* **237.** Հայտնի է, որ տրված հավասարումն ունի լուծում: Բացառման մեթոդով ապացուցեք, որ լուծումը գտնվում է նշված միջակայքում.

ա) $7^x+7^{-x}=5$, $[-1;1]$,

բ) $7^x-2\cdot 5^{-x}=3$, $(-1;1)$,

գ) $\sin x = x^2-x+0.5$, $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$,

դ) $\cos x = x^2-x+0{,}75$, $\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$,

ե) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\dfrac{18}{(4x-\pi)^2+1}$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$,

զ) $9\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\dfrac{12}{x^2+1}$, $[-1;1]$:

* **238.** Բացառման մեթոդով ապացուցեք, որ տրված անհավասարման լուծումը տրված

միջակայքի ենթաբազմություն է.

ա) $|\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x|<\dfrac{8}{1+x^2}$, $[-1;1]$,

բ) $\sin x+\cos x>x^2-12x+37$, $(5;7)$,

գ) $4\cos x+3\sin x>x^2-14x+53$, $(6;8)$:

➢**239.** Բացառման մեթոդով հիմնավորեք, որ 3-ից մեծ կամայական պարզ թիվ վեցի բաժանելիս ստացվում է 1 կամ 5 մնացորդ:

240. Տրված են 12 տարբեր երկնիշ թվեր: Ապացուցեք, որ նրանց մեջ կգտնվի երկու թիվ, որոնց տարբերությունը գրվում է երկու միևնույն թվանշաններով:

***241.** Հիմնավորեք, որ կամայական 5 մարդկանց մեջ կգտնվեն երկուսը, որոնք այդ մարդկանց մեջ ունեն միևնույն թվով ծանոթներ (համարում ենք, որ եթե մի մարդ ծանոթ է երկրորդին, ապա այդ երկրորդը ծանոթ է առաջինին):

***242.** Երկրի փուտբոլի առաջնությանը մասնակցում է 12 թիմ: Առաջին շրջանում յուրաքանչյուրը հանդիպում է մնացածների հետ մեկական անգամ: Հիմնավորեք, որ առաջին շրջանի կամայական պահի գոյություն ունի երկու թիմ, որոնք անց են կացրել միևնույն թվով խաղեր (խաղերի թիվը կարող է լինել և 0):

243. Հակաօրինակի միջոցով հերքեք պնդումը.

ա) Եթե բնական թիվը բաժանվում է 4-ի և 6-ի, ապա բաժանվում է 24-ի:

բ) Եթե բնական թվի թվանշանների գումարը բաժանվում է 27-ի, ապա այդ թիվը բաժանվում է 27-ի:

դ) Եթե բնական թվի քառակուսին բաժանվում է 8-ի, ապա այդ թիվը բաժանվում է 8-ի:

244. Հակաօրինակի միջոցով հերքեք պնդումը.

ա) Կամայական ռացիոնալ թիվ ներկայացվում է վերջավոր տասնորդական կոտորակով:

բ) Կամայական անվերջ տասնորդական կոտորակ ռացիոնալ թիվ չէ:

գ) Կամայական իռացիոնալ թվերի գումարն իռացիոնալ թիվ է:

դ) Կամայական իռացիոնալ թվերի արտադրյալն իռացիոնալ թիվ է:

245. Հակաօրինակի միջոցով հերքեք պնդումը.

Կամայական x-ի դեպքում՝

ա) $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x-1$, բ) $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$, գ) $\sqrt{x^2}=x$, դ) $\sin x=\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$:

Լուծեք խնդիրները և նշեք, թե ապացույցի ինչ մեթոդ եք օգտագործել (246-249):

➢**246.** Կատարված հանցագործության մեջ մեղադրվում էին Պողոսը, Պետրոսը և Կիրակոսը: Նրանցից յուրաքանչյուրն արել էր երկու հայտարարություն:

Պողոս - Ես չեմ արել: Կիրակոսն է արել:

Պետրոս – Կիրակոսն անմեղ է: Պողոսն է արել:

Կիրակոս - Ես չեմ արել: Պետրոսը չի արել:

Հետաքննությունը պարզեց, որ նրանցից մեկը երկու անգամ ստել է, մյուսը՝ երկու անգամ ճիշտ է ասել, իսկ երրորդը՝ մեկ անգամ ստել է և մեկ անգամ ճիշտ է ասել: Ո՞վ էր հանցագործը:

***247.** Գտեք n-ը, եթե հայտնի է, որ հետևյալ երեք պնդումներից երկուսը ճշմարիտ են, մեկը՝ կեղծ. «$n+48$-ն ամբողջ թվի քառակուսի է», «n-ի վերջին թվանշանը 4 է», «$n-41$-ն ամբողջ թվի քառակուսի է»:

➢248. Գտեք n-ը, եթե հայտնի է, որ հետևյալ երեք պնդումները ճշմարիտ են. «($n+14$)-ն ամբողջ թվի քառակուսի է», «n-ի վերջին թվանշանը 0 է», «($n-25$)-ն ամբողջ թվի քառակուսի է»:

249. Հիմնավորեք, որ 5-ով վերջացող $\overline{a5}$ բնական թվի քառակուսին կարելի է հաշվել $\left(\overline{a5}\right)^2=\overline{b25}$ բանաձևով, որտեղ $b=a(a+1)$:

Կրկնության համար

250. Դիցուք $a_1>a_2>0,\ \ b_1>b_2>0$: Գտեք, թե հետևյալ գումարներից որն է մեծ

$$a_1b_1+a_2b_2,\ \ a_1b_2+a_2b_1:$$

➢251. Դիցուք $a_1>a_2>a_3>0,\ \ b_1>b_2>b_3>0$: Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ գտեք, թե հետևյալ գումարներից որն է մեծագույնը և որը՝ փոքրագույնը.

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\ \ a_1b_1+a_2b_3+a_3b_2,\ \ a_1b_2+a_2b_1+a_3b_3,$$
$$a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1,\ \ a_1b_3+a_2b_1+a_3b_2,\ \ a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1:$$

*** 252.** Ձևակերպեք և լուծեք նախորդի նման խնդիր կամայական քանակությամբ թվերի համար:

4-րդ ԳԼՈՒԽ

Թվային հաջորդականություն, սահման

§1. Թվային հաջորդականություն

Տասներորդ դասարանում ուսումնասիրեցինք թվային ֆունկցիաները: Հիշեցնենք, որ թվային ենք անվանել այն ֆունկցիաները, որոնց որոշման տիրույթը և արժեքների բազմությունը թվային բազմություններ են: Այժմ կդիտարկենք այնպիսի թվային ֆունկցիաներ, որոնց որոշման տիրույթը բնական թվերի բազմությունն է՝ $\mathbf{N}$-ը: Այդպիսի ֆունկցիան անվանում են ***անվերջ թվային հաջորդականություն***: Քանի որ մենք դիտարկելու ենք միայն անվերջ թվային հաջորդականություններ, այսուհետև «անվերջ» բառը բաց կթողնենք, այսինքն՝ $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ ֆունկցիան կանվանենք թվային հաջորդականություն կամ, պարզապես, ***հաջորդականություն***, իսկ $a_n = f(n)$ արժեքը՝ հաջորդականության n-րդ կամ ***ընդհանուր անդամ***: Այսպիսով,

հաջորդականությունն ամեն մի n բնական թվի համապատասխանեցնում է որևէ a_n թիվ:

Հաջորդականության անկախ փոփոխականը՝ n-ը, ընդունված է անվանել ***ինդեքս*** (***համար***): Ինչպես որ ֆունկցիայի արժեքը որոշվում է անկախ փոփոխականի արժեքով, այնպես էլ հաջորդականության ամեն մի անդամ որոշվում է իր ինդեքսով:

Հաջորդականության համար մենք կօգտագործենք ֆունկցիաների տրման գրելաձևերից հետևյալը՝ $a_n,\ n\in\mathbf{N}$: Հաշվի առնելով, որ հաջորդականության ինդեքսը՝ n-ը, միշտ փոփոխվում է բնական թվերի բազմությամբ, «$a_n,\ n\in\mathbf{N}$» գրելաձևի փոխարեն մենք կօգտագործենք «a_n հաջորդականություն» բառակապակցությունը:

Քանի որ հաջորդականությունը ֆունկցիայի մասնավոր դեպքն է, նրա տրման համար պահպանվում են ֆունկցիայի տրման ձևերը, մասնավորապես, հաջորդականությունը կարելի է տալ արտահայտությամբ կամ բանաձևով:

Օրինակ 1: $a_n = \dfrac{1}{n}$ հաջորդականությունն ամեն մի բնական թվի համապատասխանեցնում է այդ թվի հակադարձը: Մասնավորապես, $a_1 = 1$, $a_5 = \dfrac{1}{5}$, $a_{2000} = \dfrac{1}{2000}$ և այլն:

Օրինակ 2: $a_n = (-1)^n$ հաջորդականության զույգ համարով (ինդեքսով) անդամները հավասար են 1-ի, կենտ համարով անդամները՝ -1-ի:

Իսկ $a_n = 5$ հաջորդականության բոլոր անդամներն իրար հավասար են (հավասար են 5-ի): Այդպիսի հաջորդականություններն անվանում են հաստատուն ***հաջորդականություններ***:

Հաջորդականության a_{n-1} և a_{n+1} անդամները կոչվում են a_n անդամի, համապատասխանաբար ***նախորդ և հաջորդ անդամներ***: Հաջորդականության տրման ձևերից է նաև տրման ***անդրադարձ եղանակը***, երբ հաջորդականության ամեն մի անդամը տրվում է նախորդ անդամի կամ անդամների միջոցով: Դուք այդպիսի հաջորդականությունների ծանոթ եք: Դրանցից են թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաները, որոնք տրվում են, համապատասխանաբար,

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad n \geq 2,$$

$$b_n = b_{n-1} \cdot q, \ \ n \geq 2$$

անդրադարձ բանաձևերով: Այդ հաջորդականությունների համար գիտեք նաև ընդհանուր անդամների բանաձևերը՝

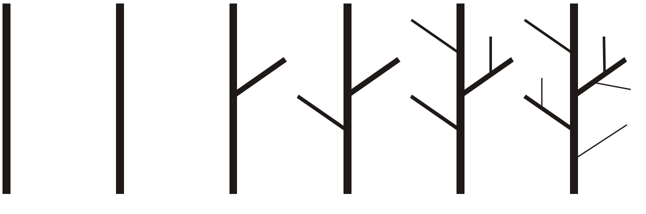
$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{և} \quad b_n = b_1 q^{n-1}:$$

Այսինքն՝ թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաները կարելի է տալ ինչպես անդրադարձ, այնպես էլ ընդհանուր անդամի բանաձևերով:

Դիտարկենք անդրադարձ բանաձևով տրվող մեկ այլ հաջորդականություն:

Օրինակ 3: Ենթադրենք ծառի յուրաքանչյուր ճյուղի վրա իր կյանքի երկրորդ տարուց հետո յուրաքանչյուր տարի ծլում է ևս մեկ ճյուղ (նկ. 13): Գտնենք, թե մեկ «նորածին» ծիլը n տարվա ընթացքում քանի՞ ճյուղ կդառնա: Եթե a_n-ով նշանակենք n-րդ տարում ճյուղերի քանակը, ապա $a_1 = a_2 = 1$: Պարզ է, որ n-րդ տարում նախորդ տարվա ճյուղերին (որոնց քանակը a_{n-1} է) ավելանում են այդ տարի ծլածները (որոնց քանակը a_{n-2} է, քանի որ n-րդ տարում ծիլ են տալիս միայն $(n-2)$-րդ տարում եղած ճյուղերը): Հետևաբար,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ \ n \geq 3:$$



$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 2 \quad a_4 = 3 \quad a_5 = 5 \quad a_6 = 8$

Նկ. 13

Այս հաջորդականությունն առաջին անգամ դիտարկել է իտալացի մաթեմատիկոս Ֆիբոնաչին, և այն անվանում են ***Ֆիբոնաչիի հաջորդականություն***, իսկ նրա անդամները՝ ***Ֆիբոնաչիի թվեր***: Հեշտ է տեսնել, որ Ֆիբոնաչիի հաջորդականության հերթական անդամներն են.

$$a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 5 \quad a_6 = 8, \quad a_7 = 13, \ldots :$$

Այս ձևով կամայական բնական n թվի համար կարող ենք գտնել a_n -ը, բայց մենք ստիպված ենք այդ ընթացքում գտնել նաև ավելի փոքր ինդեքսով անդամները: Ֆիբոնաչիի հաջորդականության ընդհանուր անդամը, ի տարբերություն թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաների, չի տրվում որևէ «պարզ» արտահայտությամբ:

Ֆունկցիաների գումարման, բազմապատկման, բաժանման, հասպապունության, սահմանափակության և մոնոտոնության սահմանումները պահպանվում են նաև հաջորդականությունների համար:

Մասնավորապես, a_n հաջորդականությունն ***աճող*** է, եթե կամայական m և k բնական թվերի համար $m < k$ պայմանից հետևում է, որ $a_m < a_k$: Նշենք միայն, որ հաջորդականության աճող լինելն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ նրա յուրաքանչյուր անդամ փոքր է իր հաջորդ անդամից (ինչո՞ւ), այսինքն,

> ***a_n հաջորդականությունն աճող է, եթե***
>
> $$\boldsymbol{a_n < a_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots :}$$

Օրինակ, 5 -ի վրա բաժանվող թվերի՝

$$5, 10, 15, 20, \ldots$$

հաջորդականությունն աճող է. նրա յուրաքանչյուր անդամ փոքր է իր հաջորդից (և հետևաբար՝ հաջորդներից):

> ***a_n հաջորդականությունը նվազող է, եթե***
>
> $$\boldsymbol{a_n > a_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots :}$$

Օրինակ,

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \ldots$$

հաջորդականությունը նվազող է. նրա յուրաքանչյուր անդամ մեծ է իր հաջորդից:

> ***a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, եթե գոյություն ունի այնպիսի $M > 0$ թիվ, որ***
>
> $$\boldsymbol{|a_n| < M, \quad n = 1, 2, 3, \ldots :}$$

Օրինակ 4: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ հաջորդականությունն աճող է և սահմանափակ:

Իրոք, ակնհայտ է, որ կամայական $n \in \mathrm{N}$ համար $0 < a_n < 1$, այսինքն՝ $|a_n| \leq 1$: Մյուս կողմից,

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0,$$

ուրեմն $a_n < a_{n+1}$, այսինքն՝ հաջորդականությունն աճող է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ի՞նչ է թվային հաջորդականությունը:
2. Ո՞րն են անվանում հաջորդականության n-րդ կամ ընդհանուր անդամ:
3. Ինչպե՞ս է կոչվում հաջորդականության անկախ փոփոխականը:
4. Հաջորդականության տրման ի՞նչ եղանակներ գիտեք:
5. Բերեք հաջորդականությունների օրինակներ:
6. Ե՞րբ են ասում, որ a_n հաջորդականությունը՝ ա) աճող է, բ) նվազող է, գ) սահմանափակ է, դ) հաստատուն է:

Առաջադրանքներ

253. Գտեք a_n հաջորդականության առաջին հինգ անդամները.

ա) $a_n = n^2 - 7$, բ) $a_n = \dfrac{n-1}{n+5}$, գ) $a_n = n + (-1)^n$,

դ) $a_n = \cos \pi n$, ե) $a_n = \sin \dfrac{\pi n}{3}$, զ) $a_n = n \cdot \sin \dfrac{\pi n}{2}$:

254. Դիցուք $a_n = 2n^2 - 3,\ n \in \mathbf{N}$: Գտնել.

ա) $a_7 - a_6$, բ) $3a_5 + 4a_2$, գ) $a_{n+1} + a_{n-1}$,

դ) $a_{2n} - 4a_n$, ե) $a_m - a_k$, զ) $a_{m+1} - a_m$:

255. Գտնել անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության չորրորդ անդամը.

ա) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = na_n$,

բ) $a_1 = 20$, $a_2 = 9$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$,

գ) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{9}{a_n}\right)$,

դ) $a_1 = 12$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$:

256. Բանաձևով գրեք հաջորդականություն, որի առաջին երեք անդամներն են.

ա) $2,\ 4,\ 6, \ldots$, բ) $1,\ 3,\ 5, \ldots$, գ) $1,\ 4,\ 9, \ldots$,

դ) $2,\ 4,\ 8, \ldots$, ե) $1,\ -1,\ 1, \ldots$, զ) $8,\ 8,\ 8, \ldots$:

➢ **257.** Գտեք անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը.

ա) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 5$,　　　բ) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$,

գ) $a_5 = 10$, $a_{n+1} = a_n - 2$,　　　դ) $a_4 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{5}$:

258. Ստուգել, որ a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է.

ա) $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$,　　　բ) $a_n = (-1)^n + \sin n$,　　　գ) $a_n = \cos(n^2 - 1)$:

➢ **259.** Սահմանափա՞կ է արդյոք a_n հաջորդականությունը, եթե՝

ա) $a_n = 1 + (-1)^n$,　　　բ) $a_n = n^{(-1)^n}$,　　　գ) $a_n = \log_5 \sqrt{n}$,

դ) $a_n = \dfrac{n^3 + n^2 + 1}{n^3 - n + 1}$,　　　ե) $a_n = \dfrac{\cos(n^2 + 1)}{n}$,　　　զ) $a_n = \operatorname{tg} \dfrac{1}{n}$:

260. Ապացուցել, որ a_n հաջորդականությունը մոնոտոն է.

ա) $a_n = 5n - 7$,　　　բ) $a_n = 4 - 2n$,　　　գ) $a_n = 3n$,

դ) $a_n = 1 - n^3$,　　　ե) $a_n = 2n^2 - n$,　　　զ) $a_n = n^2 - n^3$:

➢ **261.** Մոնոտո՞ն է արդյոք a_n հաջորդականությունը.

ա) $a_n = n^2 + 4n$,　　　բ) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$,　　　գ) $a_n = 2n - 3n^3$,

դ) $a_n = \cos n$,　　　ե) $a_n = n - \log_5 n$,　　　զ) $a_n = n \log_{0,5} n$:

262. Ապացուցել, որ a_n հաջորդականությունը մոնոտոն է.

ա) $\dfrac{n+1}{2n-1}$,　　　բ) $\dfrac{3n+1}{n+1}$,　　　գ) $\dfrac{3-2n}{3n+1}$,　　　դ) $\dfrac{5-n}{n+2}$:

* **263.** a, b, c, d գործակիցների ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում $\dfrac{an+b}{cn+d}$, $n \in \mathbf{N}$, հաջորդականությունը կլինի՝ ա) աճող, բ) նվազող:

➢ **264.** Գրեք, թե ինչ է նշանակում տրված հետևության կեղծ լինելը, և հիմնավորեք, որ այն կեղծ է.

ա) Եթե $\{a_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա այն ունի մեծագույն տարր:

բ) Եթե $\{a_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա այն ունի փոքրագույն տարր:

գ) Եթե $\{a_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա այն ունի փոքրագույն կամ մեծագույն տարր:

➢ **265.** Օգտվելով համապատասխան սահմանումից՝ գրեք, թե ինչ է նշանակում՝

ա) հաջորդականությունն աճող չէ:

բ) $\{a_n\}$ հաջորդականությունը նվազող չէ:

գ) $\{a_n\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն չէ:

դ) $\{a_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ չէ:

* **266.** Գտեք փոքրագույն թիվը, որով սահմանափակ է տրված հաջորդականությունը.

ա) $a_n = \dfrac{3n-9}{n}$, բ) $a_n = \dfrac{4n^2-51}{n^2}$, գ) $a_n = \dfrac{7n^2-2n+1}{n^2}$:

* **267.** Գտնել կոմպլեքս թվերի հաջորդականության k -րդ անդամը, եթե

ա) $a_n = (1+i)^n$, $k=8$,

բ) $a_n = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$, $k=144$,

գ) $a_n = 1+i+i^2+\cdots+i^n$, $k=200$:

* **268.** Ընդհանուր անդամով տվեք որևէ հաջորդականություն, որի առաջին երեք անդամներն են.

ա) $a_1 = 2+i$, $a_2 = 1$, $a_3 = -i$, բ) $a_1 = 1-i$, $a_2 = 1+i$, $a_3 = -1+i$:

* **269.** $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունն անվանում են սահմանափակ, եթե գոյություն ունի այնպիսի $M > 0$ թիվ, որ $|z_n| < M$, $n = 1, 2, 3, \dots$: Ապացուցել, որ $z_n = x_n + iy_n$ կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունը սահմանափակ է, այն և միայն այն դեպքում, երբ սահմանափակ են նրանց իրական և կեղծ մասերից կազմված հաջորդականությունները:

* **270.** Սահմանափա՞կ է արդյոք տրված հաջորդականությունը: Եթե այո, ապա գտեք այն փոքրագույն թիվը, որով այն սահմանափակ է.

ա) $z_n = \dfrac{n+2\cdot(-1)^n}{n}$, բ) $z_n = \dfrac{1+in}{n+i}$, գ) $z_n = \dfrac{1+i^n}{n-i}$:

Կրկնության համար

271. Բանվորը պետք է աշխատեր 4 ժամ: Նա 2 ժամ աշխատելուց հետո ևս 3 ժամ աշխատեց, բայց 20% նվազ արտադրողականությամբ: Քանի՞ տոկոսով նա կատարեց առաջադրանքը:

272. Բանվորը 7 ժամում շարել էր 12 մ² պատ, ընդ որում, առաջին 4 մ²-ն շարելուց հետո նրա արտադրողականությունն ընկել էր 20% -ով: Քանի՞ քառակուսի մետր պատ էր շարել բանվորը աշխատանքն սկսելուց 3 ժամ անց:

§2. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը

Ենթադրենք դուք գնում եք մի ճանապարհով, որի եզրով շարված են համարակալված սյուներ, և, տեսնելով, որ առաջին մի քանի սյուները ներկված են կարմիր գույնով, ուզում եք պարզել, թե արդյո՞ք բոլոր սյուներն են կարմիր: Իհարկե դուք հեշտությամբ կլուծեք այս խնդիրը (մանավանդ եթե ճանապարհը շատ երկար չէ), հերթականությամբ անցնելով բոլոր սյուների կողքով: Խնդրի լուծման այս եղանակը մեզ ծանոթ լրիվ ինդուկցիայի մեթոդն է:

Իսկ եթե ճանապարհը (ինչպես և սյուների քանակը) անվերջ լինի՞: Այս դեպքում որքան հեռու էլ դուք գնաք, և ձեզ հանդիպած սյուները կարմիր լինեն, չեք կարող համոզված լինել, որ բոլոր սյուները կարմիր են:

Այժմ պատկերացրեք, թե ստուգել եք, որ անվերջ ճանապարհի առաջին սյունը կարմիր է, և ներկարարից պարզել եք, որ եթե որևէ մի սյուն (k -րդը) կարմիր է եղել, ապա նա հաջորդ սյունը ($(k+1)$ -րդը) նույնպես կարմիր է ներկել: Այդ դեպքում կարող եք պնդել, որ բոլոր սյուները կարմիր են: Իրոք, եթե առաջին սյունը կարմիր է, ապա ներկարարի ասածի համաձայն կարմիր է նաև 2 -րդը, ուրեմն նաև 3 -րդը, 4 -րդը, և այլն: Այսպես, քայլ առ քայլ, կարող ենք հասնել կամայական n -ի և պնդել, որ n -րդ սյունը կարմիր է, այսինքն բոլոր սյուները կարմիր են:

Դիտարկենք «ավելի մաթեմատիկական» օրինակ, զուգահեռներ տանելով սյուների օրինակի հետ:Ապացուցենք, որ $a_n = n^3 + 5n$ հաջորդականության բոլոր անդամները բաժանվում են 6 -ի (բոլոր սյուները կարմիր են): Առաջին անդամը բաժանվում է 6 -ի, քանի որ $a_1 = 6$ (առաջին սյունը կարմիր է): Ենթադրենք որևէ բնական k -ի դեպքում հաջորդականության k -րդ անդամը բաժանվում է 6 -ի (ենթադրենք k-րդ սյունը կարմիր է): Այդ դեպքում՝

$$a_{k+1} = (k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 =$$
$$= k^3 + 5k + 3k(k+1) + 6 = a_k + 3k(k+1) + 6:$$

Քանի որ k և $k+1$ թվերից մեկը զույգ է, ուստի զույգ է նաև $k(k+1)$-ը և $3k(k+1)$-ը բաժանվում է 6 -ի: Համաձայն մեր ենթադրության՝ a_k -ն ևս բաժանվում է 6 -ի: Ուստի a_{k+1} -ը, որպես 6 -ի բաժանվող թվերի գումար, նույնպես կբաժանվի 6 -ի ($(k+1)$ -րդ սյունը նույնպես կարմիր է): Հետևաբար a_n -ը բաժանվում է 6 -ի կամայական n -ի դեպքում (բոլոր սյուները կարմիր են):

Բնական n -ի համար $P(n)$-ով նշանակենք «$n^3 + 5n$ թիվը բաժանվում է 6 -ի» պնդումը: Օրինակ,

$P(1)$ պնդումն է՝ «$1^3 + 5 \cdot 1$ թիվը բաժանվում է 6 -ի»,

$P(4)$ պնդումն է՝ «$4^3 + 5 \cdot 4$ թիվը բաժանվում է 6 -ի»,

$P(7)$ պնդումն է՝ «$7^3+5\cdot7$ թիվը բաժանվում է 6-ի», և այլն:

Այս բոլոր պնդումները ճշմարիտ են, ավելին, մենք փաստորեն ապացուցեցինք, որ $P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի դեպքում:

Ապացույցի մեթոդը, որ մենք կիրառեցինք, կոչվում է ***մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդ***:

Թվաբանության, հանրահաշվի, երկրաչափության և մաթեմատիկայի այլ բնագավառներում երբեմն անհրաժեշտ է լինում ապացուցել, որ ինչ-որ $P(n)$ պնդում, որը կախված է n բնական փոփոխականից, տեղի ունի այդ փոփոխականի բոլոր արժեքների համար: Նման դեպքերում հաճախ կիրառում են մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, որը հիմնված է հետևյալ սկզբունքի վրա.

$P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է բոլոր բնական n-երի համար, եթե տեղի ունեն հետևյալ երկու պայմանները.

1. $n=1$ դեպքում $P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է,

2. «$P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է $n=k$ դեպքում» ենթադրությունից հետևում է, որ $P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է $n=k+1$ դեպքում, որտեղ k-ն կամայական բնական թիվ է:

Որպեսզի մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք, որ $P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի համար, պետք է կատարենք հետևյալ քայլերը.

1) Ապացուցել $P(1)$ պնդումը ***(ինդուկցիայի հենք կամ հենքային քայլ)***:

2) Ենթադրել, որ ճշմարիտ է $P(k)$ պնդումը ***(ինդուկցիոն ենթադրություն)***:

3) Ապացուցել, որ այդ դեպքում ճշմարիտ է $P(k+1)$ պնդումը ***(ինդուկցիոն քայլ)***:

4) Եզրակացնել, որ $P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի համար ***(եզրակացություն)***:

Բնական թվերի բազմությունն ունի այն հատկությունը, որ նրա կամայական ոչ դատարկ ենթաբազմություն ունի փոքրագույն տարր: Հենվելով այդ հատկության վրա, կարելի է ապացուցել մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը:

Իրոք, ենթադրենք հակառակը. ինչ-որ $P(n)$ պնդում բավարարում է 1. և 2. պայմաններին, սակայն այն ոչ բոլոր n-երի համար է ճշմարիտ: Այդ դեպքում, եթե A-ով նշանակենք այն բնական n-երի բազմությունը, որոնց համար $P(n)$ պնդումը ճշմարիտ չէ, ապա A-ն կլինի բնական թվերի ոչ դատարկ ենթաբազմություն: Ուստի A-ն ունի փոքրագույն տարր. այն նշանակենք n_0-ով: Քանի որ $P(1)$-ը ճիշտ է, ուրեմն $n_0>1$: Հետևաբար, (n_0-1)-ը բնական թիվ է և չի պատկանում A-ին, քանի որ n_0-ն A-ի փոքրագույն տարրն էր: Ուստի $P(n_0-1)$ պնդումը ճշմարիտ է: Այդ դեպքում, համաձայն 2. պայմանի, պետք է ճշմարիտ լինի նաև $P(n_0)$ պնդումը: Սա հակասում է այն բանին, որ $n_0\in A$, քանի որ A-ին պատկանող n-երի դեպքում $P(n)$ պնդում ճշմարիտ չէր:

Ուստի մեր ենթադրությունն այն մասին, որ որևէ պնդում կարող է բավարարել 1. և 2. պայմաններին և լինել ոչ ճշմարիտ որևէ n-ի դեպքում, սխալ է:

Օրինակ 1: Ապացուցենք, որ d տարբերությամբ և a_1 առաջին անդամով թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամն է՝

$$a_n = a_1 + (n-1)d: \qquad (1)$$

Փաստորեն, այստեղ $P(n)$ պնդումը հետևյալն է.

«եթե a_n թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը d է, իսկ առաջին անդամը՝ a_1, ապա $a_n = a_1 + (n-1)d$»:

1) $P(1)$ պնդումը ճշմարիտ է, քանի որ $a_1 = a_1 + (1-1)d$:

2) Ենթադրենք $P(k)$ պնդումը ճշմարիտ է, այսինքն

$$a_k = a_1 + (k-1)d: \qquad (2)$$

3) Ապացուցենք, որ ճշմարիտ է $P(k+1)$ պնդումը, այսինքն, որ

$$a_{k+1} = a_1 + kd: \qquad (3)$$

Իրոք, համաձայն թվաբանական պրոգրեսիայի սահմանման, $a_{k+1} = a_k + d$: Ուստի (2) առնչությունից կունենանք.

$$a_{k+1} = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd:$$

4) Համաձայն մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի, (1) բանաձևը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի դեպքում:

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ կամայական $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերի համար

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots |a_n|: \qquad (4)$$

Նախ ապացուցենք, որ կամայական a և b թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը, որն ընդունված է անվանել ***եռանկյան անհավասարություն***.

$$|a+b| \le |a| + |b| \qquad (5)$$

Իրոք գումարելով

$$-|a| \le a \le |a| \text{ և } -|b| \le b \le |b|$$

կրկնակի անհավասարությունները, կստանանք

$$-(|a|+|b|) \le a+b \le (|a|+|b|)$$

որտեղից հետևում է (5)-ը:

Այժմ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք (4) անհավասարությունը:

1) Անհավասարությունը ճշմարիտ է, երբ $n=1$, քանի որ $|a_1| \le |a_1|$:

2) Ենթադրենք պնդումը ճշմարիտ է $n=k$ դեպքում, այսինքն կամայական

$a_1, a_2, \dots, a_k$ թվերի համար

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \le |a_1| + |a_2| + \cdots |a_k| : \qquad (6)$$

3) Ապացուցենք $n = k + 1$ դեպքում: Օգտվելով նախ (5), ապա (6) անհավասարություններից, կստանանք, որ կամայական $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ թվերի համար

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}| = |(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1}|$$
$$\le |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{k+1}| :$$

4) Համաձայն մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի, (4) անհավասարությունը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի դեպքում:

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ կամայական բնական n-ի դեպքում

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 : \qquad (7)$$

1) Երբ $n = 1$, հավասարության երկու մասերը հավասար են 1-ի, հետևաբար ինդուկցիայի հենքը բավարարված է:

2) Ենթադրենք (7) բանաձևը ճշմարիտ է $n = k$ դեպքում, այսինքն՝

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 :$$

3) Վերջին հավասարության երկու մասերին գումարելով $(k+1)^3$ և ձևափոխելով աջ մասը, ստանում ենք՝

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 =$$
$$= (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1 \right) = (k+1)^2 \frac{(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2 :$$

Այսպիսով, ինդուկցիոն քայլն ապացուցված է ((7) բանաձևը ճշմարիտ է $n = k + 1$ դեպքում):

4) Հետևաբար (7) բանաձևը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի համար:

Օրինակ 4: Ապացուցենք, որ կամայական բնական n-ի դեպքում $a_n = 5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ արտահայտությունը բաժանվում է 19-ի:

Երբ $n = 1$, պնդումը ճշմարիտ է, քանի որ $a_1 = 19$ (***ինդուկցիայի հենքը***):

Ենթադրենք պնդումը ճշմարիտ է $n = k$ դեպքում, այսինքն՝ $a_k = 5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}$ արտահայտությունը բաժանվում է 19-ի (***ինդուկցիոն ենթադրություն***):

Ապացուցենք, որ a_{k+1}-ը ևս բաժանվում է 19-ի (***ինդուկցիոն քայլ***): Ունենք, որ

$$a_{k+1} = 5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1} = 40 \cdot 2^{3k-2} + 27 \cdot 3^{3k-1} =$$
$$= 8(5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}) + 19 \cdot 3^{3k-1} = 8 \cdot a_k + 19 \cdot 3^{3k-1} :$$

Ստացված $8\cdot a_k+19\cdot 3^{3k-1}$ արտահայտությունը բաժանվում է 19 -ի: Իրոք՝ առաջին գումարելին բաժանվում է 19 -ի՝ համաձայն ինդուկցիոն ենթադրության, իսկ երկրորդ գումարելիի համար 19 -ը արտադրիչ է: Հետևաբար, $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ արտահայտությունը բաժանվում է 19 -ի կամայական բնական n -ի դեպքում ***(եզրակացություն)***:

Օրինակ 5: Գտնենք $x_{n+1}=x_n+2n+1$, $x_1=1$ անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը:

Հաշվենք հաջորդականության մի քանի անդամ.

$x_1=1$,

$x_2=1+2\cdot 1+1=4$,

$x_3=4+2\cdot 2+1=9$,

$x_4=9+2\cdot 3+1=16$:

Դժվար չէ նկատել, որ ստացված թվերը ենթարկվում են որոշակի օրինաչափության՝

$$x_1=1^2,\ x_2=2^3,\ x_3=3^2,\ x_4=4^2:$$

Կարելի է ենթադրել, որ այդ օրինաչափությանը ենթարկվում են հաջորդականության բոլոր անդամները, այսինքն, որ կամայական բնական n -ի համար,

$$x_n=n^2: \qquad (8)$$

Այժմ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք, որ տրված հաջորդականությունն իրոք տրվում է (5) բանաձևով:

Ինչպես տեսանք, $n=1$ դեպքում այն ճշմարիտ է:

Ենթադրելով, որ (5) բանաձևը տեղի ունի $n=k$ դեպքում, անդրադարձ բանաձևից կունենանք.

$$x_{k+1}=x_k+2k+1=k^2+2k+1=(k+1)^2:$$

Այսինքն, (8) բանաձևը տեղի ունի նաև $n=k+1$ դեպքում: Ուրեմն այն ճշմարիտ է բոլոր բնական n -երի համար:

Պատասխան՝ $x_n=n^2$, $n\in\mathbf{N}$:

Նկատենք, որ մեր դիտարկած վերջին օրինակն էապես տարբերվում էր նախորդներից. այստեղ մեզ հայտնի չէր պնդումը, որը պետք էր ապացուցել: Դիտարկելով մի քանի մասնավոր դեպք՝ կիրառեցինք թերի ինդուկցիա և առաջադրեցինք վարկած, որ ճշմարիտ է (8) բանաձևը, այնուհետև մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեցինք մեր վարկածի ճշմարտացիությունը:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր դեպքերում է կիրառվում մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը:
2. Ձևակերպել մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը:
3. Ի՞նչ քայլեր պետք է կատարել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացույցի դեպքում:

4. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամի բանաձևը:

Առաջադրանքներ

273. Գրել $P(1)$, $P(6)$, $P(k)$, $P(k+1)$ պնդումները, եթե $P(n)$ պնդումն է՝

ա) (n^3-n)-ը բաժանվում է 6-ի,

բ) $1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots n\cdot(2n+1)=\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$,

գ) $2^{n+2}>n+4$:

274. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել երկրաչափական պրոգրեսիայի n-րդ անդամի բանաձևը:

275. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել.

ա) թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի բանաձևը,

բ) երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի բանաձևը:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել, որ հավասարությունը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի դեպքում (276-282).

276. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

277. $2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$:

278. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$:

279. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$:

280. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$:

281. $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$:

282. $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

➢**283.** Ապացուցել, որ անդրադարձ բանաձևով տրված a_n հաջորդականության համար՝

ա) եթե $a_1=2,\quad a_{n+1}=3a_n+1$, ապա $a_n=\frac{1}{2}\left(5\cdot3^{n-1}-1\right)$,

բ) եթե $a_1=5,\ a_2=7,\quad a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}$, ապա $a_n=3+2n$:

➢**284.** Գտնել անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը.

ա) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)\cdot a_n$, բ) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = n\cdot a_n$,

գ) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$, դ) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 4n + 2$:

285. Գտնել a_n հաջորդականության ընդհանուր անդամը, եթե հայտնի է, որ $a_1 = 3$ և կամայական m, n բնական թվերի համար.

ա) $a_{m+n} = a_m + a_n$, բ) $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$:

* **286.** Տրված a, b թվերով և

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\quad b_1 = \frac{a_1+b}{2}, \ldots, a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_n}{2}$$

անդրադարձ բանաձևերով որոշվում են a_n և b_n հաջորդականությունները: Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար

$$a_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \text{ և } b_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^n}\right):$$

* **287.** Դիցուք a_n-ը Ֆիբոնաչիի հաջորդականությունն է: Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար՝

ա) $a_{2n+2} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}$, բ) $a_{2n+1} = 1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}$,

գ) $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+1}$, դ) $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = (-1)^n$:

➢ **288.** Դիցուք $a_1 = \sqrt{2}$ և $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \in \mathbf{N}$: Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար

$$a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}:$$

➢ **289.** Դիցուք $a_1 = 3$ և $a_{n+1} = a_n + \underbrace{33\ldots3}_{n+1 \text{ հատ}}$, $n \in \mathbf{N}$: Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար

$$a_n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}:$$

➢ **290.** Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի դեպքում.

ա) $(8^n - 1)$-ը բաժանվում է 7-ի,

բ) $(17^n - 8^n)$-ը բաժանվում է 9-ի,

գ) $(9^n + 11)$-ը բաժանվում է 4-ի,

դ) $(5^{4n+1} - 5)$-ը բաժանվում է 30-ի:

* **291.** Ապացուցել, որ կամայական a և b ամբողջ թվերի համար.

ա) կամայական բնական n-ի դեպքում $a^n - b^n$ տարբերությունը բաժանվում է $(a-b)$-ի, բ) կամայական կենտ n-ի դեպքում a^n+b^n գումարը բաժանվում է $(a+b)$-ի:

292. Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի դեպքում՝

ա) $\left(11^{n+1}+12^{2n-1}\right)$-ը բաժանվում է 133-ի,

բ) $\left(37^{n+2}+16^{n+1}+23^{n}\right)$-ը բաժանվում է 7-ի:

Կրկնության համար

293. Գտնել x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում տրված արտահայտությունները կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա.

ա) $\lg\frac{x}{3}$, $\lg\sqrt{x^2-4}$, $\lg(x+2)$, բ) $\sqrt{5x+1}$, $2x$, $3x+1$:

294. Գտնել x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում տրված արտահայտությունները կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա.

ա) $\sqrt{x+7}$, $\sqrt{x-5}$, 1, բ) $2\lg x$, $2+\lg x$, $\frac{7}{2}+\lg x$:

*§3. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի այլ կիրառություններ

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը հաճախ արդյունավետ է լինում նաև անհավասարություններ ապացուցելիս:

Օրինակ 1: Ապացուցենք, որ կամայական բնական n-ի համար

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1:$$

Երբ $n=1$, անհավասարությունը ճշմարիտ է.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1:$$

Ենթադրենք անհավասարությունը ճշմարիտ է $n=k$ դեպքում, այսինքն՝

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k+1}>1: \qquad (1)$$

Ապացուցենք, որ այն ճշմարիտ է $n=k+1$ դեպքում, այսինքն՝

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}>1:$$

(1) անհավասարության երկու մասերին գումարելով

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$$

արտահայտությունը, ստանում ենք

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}>1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$$

անհավասարությունը: Հեշտ է ստուգել, որ

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}=\frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>0:$$

Հետևաբար,

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}>1+\frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>1:$$

Այսպիսով, ենթադրելով, որ անհավասարությունը ճշմարիտ է $n=k$ դեպքում, ստացանք, որ այն ճշմարիտ է նաև $n=k+1$ դեպքում: Համաձայն մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի, անհավասարությունը ճշմարիտ է կամայական բնական n-ի դեպքում:

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ կամայական $x_1, x_2, \cdots, x_n$ դրական թվերի համար,

$$\text{եթե } x_1 x_2 \cdots x_n = 1\text{, ապա } x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n: \qquad (2)$$

Երբ $n=1$, ապա, ըստ պայմանի, $x_1 = 1$, ուստի կարող ենք գրել՝ $x_1 \geq 1$: Այսինքն՝ $n=1$ դեպքում պնդումը ճշմարիտ է:

Ենթադրենք պնդումը ճշմարիտ է $n=k$ դեպքում և ապացուցենք այն $n=k+1$ դեպքում: Դիցուք $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}$ թվերը կամայական դրական թվեր են և $x_1 x_2 \cdots x_k x_{k+1} = 1$: Հնարավոր է երկու դեպք.

1) $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 1$,

2) այդ թվերից որևէ մեկը մեծ է 1-ից և մեկ ուրիշը փոքր է 1-ից:

Առաջին դեպքում ստացվում է, որ $x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} = k+1$:

Երկրորդ դեպքում, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարող ենք ենթադրել, որ $x_k > 1$ և $x_{k+1} < 1$: Դիտարկենք $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k \cdot x_{k+1}$ դրական թվերը, որոնց քանակը k է և $x_1 x_2 \cdots (x_k x_{k+1}) = 1$: Համաձայն ինդուկցիոն ենթադրության՝

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} \geq k:$$

Հետևաբար,

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} &= x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} \geq \\ &\geq k+1+(x_k-1)-x_{k+1}(x_k-1) = k+1+(x_k-1)(1-x_{k+1}) > k+1,\end{aligned}$$

քանի որ $x_k - 1 > 0$ և $1 - x_{k+1} > 0$: Այսպիսով, երկու դեպքում էլ ստացվում է՝

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geq k+1:$$

Պնդումն ապացուցված է:

Օգտվելով այս օրինակից, կարող ենք ապացուցել թվերի թվաբանական և երկրաչափական միջինների միջև առնչությունը.

Կամայական $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ոչ բացասական թվերի թվաբանական միջինը փոքր չէ նրանց երկրաչափական միջինից.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}: \qquad (3)$$

Իրոք, երբ այդ թվերից որևէ մեկը հավասար է 0-ի, անհավասարության աջ մասը զրո է, իսկ ձախ մասը՝ ոչ բացասական, և անհավասարությունը տեղի ունի: Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ բոլոր թվերը դրական են: Այդ դեպքում $a_1 a_2 \cdots a_n > 0$, և նշանակելով

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}, \ldots, \quad x_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}},$$

ստանում ենք՝ $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$: Կիրառելով (2) անհավասարությունը, ստանում ենք՝

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \geq n$$

որտեղից էլ հետևում է (3)-ը:

Երբեմն անհրաժեշտ է լինում ապացուցել որևէ $P(n)$ պնդում այնպիսի բնական n-երի համար, որոնք մեծ կամ հավասար են որևէ բնական m թվից: Այդպիսի դեպքերում բավական է.

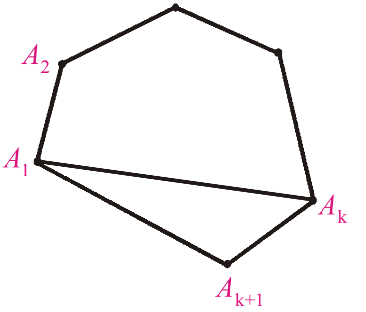
1. ***Ապացուցել $P(m)$ պնդումը,***

2. ***Ապացուցել, որ «$P(n)$ պնդումը ճշմարիտ է $n = k$ դեպքում» ենթադրությունից հետևում է, որ պնդումը ճշմարիտ է նաև $n = k + 1$ դեպքում, որտեղ $k \geq m$:***

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ ուռուցիկ n-անկյան ($n \geq 3$) ներքին անկյունների գումարը $180^\circ(n-2)$ է:

Երբ $n = 3$, պնդումը եռանկյան ներքին անկյունների գումարի վերաբերյալ թեորեմն է:

Ենթադրենք պնդումը ճշմարիտ է $n = k$ դեպքում, $k \geq 3$, և $A_1 A_2 \ldots A_{k+1}$-ը կամայական ուռուցիկ $(k+1)$-անկյուն է (նկ. 14): Համաձայն ինդուկցիոն ենթադրության, $A_1 A_2 \ldots A_k$ բազմանկյան ներքին անկյունների գումարը $180^\circ(k-2)$ է: Հաշվի առնելով, որ $A_1 A_2 \ldots A_{k+1}$ բազմանկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է $A_1 A_2 \ldots A_k$ բազմանկյան ներքին անկյունների և $A_1 A_k A_{k+1}$ եռանկյան ներքին անկյուն-



Նկ. 14

ների գումարին, ստանում ենք, որ $A_1A_2\ldots A_{k+1}$ բազմանկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է՝ $180^\circ(k-2)+180^\circ=180^\circ(k-1)$: Պնդումն ապացուցված է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ապացուցեք, որ եթե $x_1, x_2, \cdots, x_n$ դրական թվերի արտադրյալը 1 է, ապա $x_1+x_2+\cdots+x_n \ge n$:
2. Ի՞նչ կապ կա դրական թվերի թվաբանական և երկրաչափական միջինների միջև:
3. Ապացուցեք, որ ուռուցիկ n-անկյան ներքին անկյունների գումարը $180^\circ(n-2)$ է:

Առաջադրանքներ

➢295. Ապացուցել, որ կամայական $a_1, a_2, \cdots, a_n$ թվերի համար

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \ge |a_1|-|a_2|-\cdots-|a_n|:$$

296. Ապացուցել անհավասարությունը նշված բնական n-երի համար․

ա) $3^n > n^3+5, \quad n\ge 4$, բ) $2^n \ge 5n-3, \quad n\ge 5$:

գ) $3^n > 2^n+n, \quad n\ge 2$, դ) $2^n > n^2, \quad n\ge 5$:

Ապացուցել անհավասարությունը 1-ից մեծ բնական թվերի համար (297-300).

➢297. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$:

➢298. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$:

➢299. $\sqrt{n} < 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$:

*** 300.** $\dfrac{n}{2} < 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1} < n$:

➢301. Ապացուցել, որ 7-ից մեծ կամայական բնական թիվ կարելի է ներկայացնել 3-երի և 5-երի գումարով:

302. Ապացուցել, որ 1-ից մեծ կամայական բնական n-ի դեպքում $2^{2^n}+1$ թիվը վերջանում է 7 թվանշանով:

303. Դիցուք հարթության վրա զույգ առ զույգ հատվող n ուղիղներից ոչ մի երեքը չեն անցնում մի կետով ($n \ge 2$): Ապացուցել, որ այդ ուղիղների հատման կետերի քանակը $\dfrac{n(n-1)}{2}$ է:

*** 304.** Դիցուք հարթության վրա զույգ առ զույգ հատվող n ուղիղներից ոչ մի երեքը չեն անցնում մի կետով: Ապացուցել, որ այդ ուղիղներով հարթությունը տրոհվում է $\dfrac{n(n+1)}{2}+1$ մասի:

* **305.** Դիցուք n հարթությունններից կամայական երեքը հատվում են մի կետում, իսկ կամայական չորսի հատումը դատարկ է: Ապացուցել, որ.

ա) այդ հարթությունների հատման գծերի քանակն է՝ $\frac{n(n-1)}{2}$,

բ) այդ հարթությունների եռյակների հատման կետերի քանակն է՝

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}:$$

* **306.** Ապացուցել, որ կամայական $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ոչ բացասական թվերի համար, եթե $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le \frac{1}{2}$, ապա $(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) \ge \frac{1}{2}$:

➢**307.** Դիցուք $h > -1$: Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար

$$(1+h)^n \ge 1+nh:$$

* **308.** Գտեք անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը.

ա) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,

բ) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2}$,

գ) $a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$,

դ) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$,

ե) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n+1}$,

զ) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + \cdots + na_n}{n+1}$,

է) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1^2\cdot a_1 + 2^2\cdot a_2 + \cdots + n^2 a_n}{(n+1)^2}$:

Կրկնության համար

Լուծեք հավասարումը (309-310).

309. ա) $\sin 2x \sin 3x + \cos 5x = 0$,

բ) $\cos x \cos 5x = \cos 6x$,

գ) $3\cos^2 3x = (1+\cos 6x)\sin x$,

դ) $\sin 3x - \sin 7x = \sqrt{3}\sin 2x$:

310. ա) $6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$,

բ) $\sin^2 x - \sin 2x = 3\cos^2 x$:

§4. Անվերջ փոքրեր

Ենթադրենք ունեք մի խնձոր: Առաջին օրն ուտում եք խնձորի կեսը, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ օրն ուտում եք մնացածի կեսը: Հարց է ծագում. քանի՞ օրում կուտեք ամբողջ խնձորը:

Առաջին օրն ուտելուց հետո մնում է խնձորի $\frac{1}{2}$ մասը, երկրորդ օրը՝ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$

մասը, երրորդ օրը՝ $\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^3}$ մասը և այլն: Եթե a_n-ով նշանակենք n-րդ օրն ուտելուց հետո մնացած մասը, ապա կստանանք $a_n=\frac{1}{2^n}$ հաջորդականությունը, որի անդամները ոչ մի n-ի դեպքում զրո չեն դառնում (նկ. 15): Այսինքն՝ ձեզ երբեք չի հաջողվի խնձորն ուտել ամբողջությամբ:

Այժմ ուրիշ հարց է ծագում. խնձորի ո՞ր մասը չի հաջողվի ուտել: Պարզվում է, որ այդպիսի մաս գոյություն չունի: Իրոք, որքան էլ փոքր լինի ε դրական թիվը, վերցնելով $\frac{1}{\varepsilon}$-ից մեծ բնական n և օգտվելով $2^n>n$ ակնհայտ անհավասարությունից, ստանում ենք՝ $a_n=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$: Այսինքն, եթե $n>\frac{1}{\varepsilon}$, ապա n օր ուտելուց հետո խնձորից մնում

1 $\quad a_1=\frac{1}{2} \quad a_2=\frac{1}{2^2} \quad a_3=\frac{1}{2^3} \quad a_4=\frac{1}{2^4} \quad a_5=\frac{1}{2^5} \quad a_6=\frac{1}{2^6}$

Նկ. 15

է նրա ε-ից փոքր մասը:

Հետաքրքիր իրավիճակ է ստեղծվում. մի կողմից, երբեք չի հաջողվում խնձորն ուտել ամբողջությամբ, մյուս կողմից՝ խնձորից, ըստ էության, ոչինչ չի մնում, քանի որ խնձորից մնացած մասն անվերջ փոքրանում է:

Նման հաջորդականությունները, որոնցից «ըստ էության ոչինչ չի մնում», շատ կարևոր դեր են խաղում հաջորդականություններ և ֆունկցիաներ ուսումնասիրելիս:

a_n հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ փոքր, եթե կամայական ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի N բնական թիվ, որ $n>N$ պայմանից հետևում է

$$|a_n|<\varepsilon \qquad (1)$$

անհավասարությունը:

Այլ կերպ կարելի է ասել, որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, եթե նրա անդամները, ինչ-որ համարից սկսած, բացարձակ արժեքով փոքր են նախապես տրված կամայական դրական թվից: Փաստորեն, այդ «ինչ-որ համարն» այն բնական N-ն է, որից ավելի մեծ ինդեքսներով անդամները բավարարում են (1) անհավասարությանը:

Օրինակ 1: Ակնհայտ է, որ

$a_n=0,\ n\in\mathbf{N}$, ***հաջորդականությունն անվերջ փոքր է***:

Օրինակ 2: Ցույց տանք, որ

$$a_n=\frac{1}{n} \text{ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:}$$

Դիցուք ε-ը կամայական դրական թիվ է: Որպես N վերցնենք $\frac{1}{\varepsilon}$-ից մեծ որևէ բնական թիվ: Այդ դեպքում, եթե $n>N$, ապա

$$|a_n|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\frac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon:$$

Հետևաբար, a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Օրինակ 3: Ստուգենք, որ

$$b_n=q^n \text{ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, եթե } |q|<1:$$

Եթե $q=0$, ապա ստանում ենք $b_n=0$, $n\in \mathbf{N}$ հաջորդականությունը, որն անվերջ փոքր է: Դիցուք $q\neq 0$ և ε-ը որևէ դրական թիվ է: Պարզենք, թե ո՞ր բնական n-երի համար տեղի ունի $|b_n|<\varepsilon$ անհավասարությունը: Քանի որ $0<|q|<1$, ուրեմն

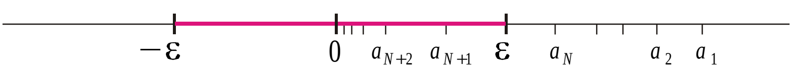
$$|b_n|<\varepsilon \Leftrightarrow |q|^n<\varepsilon \Leftrightarrow n>\log_{|q|}\varepsilon:$$

Այսպիսով, եթե տրված $\varepsilon>0$ թվի համար վերցնենք $\log_{|q|}\varepsilon$ թվից մեծ որևէ բնական N, ապա $n>N$ պայմանից կհետևի, որ $|b_n|<\varepsilon$: Այսինքն՝ b_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Հարկ է նշել, որ բոլորովին կարևոր չէ գտնել փոքրագույն N-ը, որից սկսած տեղի ունի (1) անհավասարությունը: Կարևորը կամայական դրական ε-ի համար այդպիսի N-ի գոյությունն է:

Նկատենք, որ անվերջ փոքրի սահմանման մեջ $|a_n|<\varepsilon$ անհավասարությունը երկրաչափորեն նշանակում է, որ թվային առանցքի վրա a_n կետն ընկած է $(-\varepsilon;\varepsilon)$ միջակայքում, ուստի a_n հաջորդականության անվերջ փոքր լինելու երկրաչափական մեկնաբանությունը հետևյալն է.

a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, եթե կամայական ε դրական թվի համար $(-\varepsilon;\varepsilon)$ միջակայքից դուրս կարող են լինել միայն վերջավոր թվով a_n-եր (նկ. 16)**:**



Նկ. 16

Օրինակ 4: $a_n=1+(-1)^n$ հաջորդականության զույգ համարով անդամները հավասար են 2-ի, իսկ կենտ համարով անդամները՝ 0-ի: Այն անվերջ փոքր չէ, քանի որ $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ միջակայքից դուրս գտնվում են անվերջ թվով a_n-եր (բոլոր զույգ համարով a_n-երը):

Հակացե՞լ եք դասը

1. Կհաջողվի՞, արդյոք, խնդորն ուտել ամբողջությամբ, եթե օրական ուտում եք մնացածի կեսը:
2. Խնձորի ո՞ր մասը երբեք չեք ուտի, եթե օրական ուտում եք մնացած մասի կեսը:
3. Ո՞ր հաջորդականությունն են անվանում անվերջ փոքր:
4. Ապացուցեք, որ $a_n = \frac{1}{n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:
5. Ապացուցեք, որ $b_n = q^n$, $(|q|<1)$, հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Առաջադրանքներ

311. Ուղղանկյունաձև թուղթն ունի 1 մակերես: Քանի՞ անգամ է պետք կեսից ծալել թուղթը, որպեսզի ստացված մակերեսը լինի փոքր՝ ա) 10^{-2}-ից, բ) 10^{-3}-ից:

312. Ստուգել, որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է.

ա) $a_n = \frac{1}{n+9}$, բ) $a_n = \frac{1}{2n+1}$, գ) $a_n = \frac{1}{n^2+n}$,

դ) $a_n = \frac{1}{3n^2+1}$, ե) $a_n = \frac{3}{2^{2n}}$, զ) $a_n = \frac{3^n}{2^{2n}}$:

313. a_n հաջորդականության քանի՞ անդամ է գտնվում $(-\varepsilon; \varepsilon)$ միջակայքից դուրս, եթե.

ա) $a_n = \frac{15}{2n+3}$, $\varepsilon = 0{,}1$, բ) $a_n = \frac{2}{n^2+1}$, $\varepsilon = 0{,}01$:

314. Տրված ε-ի համար գտնել փոքրագույն N-ը, որից մեծ n-երի համար տեղի ունի $|a_n| < \varepsilon$ անհավասարությունը.

ա) $a_n = \frac{1}{n+5}$, եթե՝ 1) $\varepsilon = 0{,}1$, 2) $\varepsilon = 0{,}01$,

բ) $a_n = \frac{1}{n^2}$, եթե՝ 1) $\varepsilon = 0{,}01$, 2) $\varepsilon = 0{,}0001$:

➤**315.** Ապացուցել, որ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա անվերջ փոքր է նաև $b_n = a_{n+k}$, $n \in \mathbf{N}$, հաջորդականությունը, որտեղ՝ ա) $k=1$, բ) $k=10$, գ) k-ն կամայական բնական թիվ է:

➤**316.** Դիցուք a_n և b_n հաջորդականությունների անդամները ինչ-որ n_0 համարից սկսած համընկնում են՝ $a_n = b_n$, երբ $n \ge n_0$: Ապացուցեք, որ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա b_n-ը ևս անվերջ փոքր է:

➤**317.** Ապացուցել, որ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է և $|b_n| \le |a_n|$, $n \in \mathbf{N}$, ապա b_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

318. Դիցուք a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է: Ապացուցել, որ a_{2n} և a_{2n+1}, $n \in \mathbf{N}$, հաջորդականություններն անվերջ փոքր են:

➤**319.** Ապացուցել, որ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա անվերջ փոքր է նաև b_n հաջորդականությունը, որտեղ՝

ա) $b_n = -a_n$, բ) $b_n = a_n^2$, գ) $b_n = a_n^3$,

դ) $b_n = \sqrt{|a_n|}$, ե) $b_n = |a_n|^p$, $p > 0$, զ) $b_n = a_n^n$:

320. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից, ապացուցել, որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է.

ա) $b_n = -\dfrac{1}{n}$, բ) $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, գ) $b_n = \dfrac{1}{n^3}$,

դ) $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, ե) $b_n = \dfrac{1}{n^p}$, $p > 0$, զ) $b_n = \dfrac{1}{n^n}$:

321. Օգտվելով անվերջ փոքրի երկրաչափական մեկնաբանությունից՝ ձևակերպեք «a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է» ասույթի ժխտումը:

➤**322.** Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից համոզվեք, որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր չէ.

ա) $a_n = 1-(-1)^n$, բ) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, գ) $a_n = \dfrac{n^2-n}{n^2+n}$:

Կրկնության համար

➤**323.** Պարզեցնել արտահայտությունը և հաշվել նրա արժեքը.

ա) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{4a^3}-2\sqrt[4]{4a}}{2-\sqrt{a}}+\dfrac{18+2\sqrt{a}}{\sqrt[4]{4a}}\right):\dfrac{a+1}{\sqrt[4]{4a}}$, երբ $a=5$,

բ) $\left(b+2\sqrt{b}+1\right)^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}+1}+\dfrac{\sqrt{b}+3}{\sqrt{b}-1}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}-1}\right)$, երբ $b=2$:

➤**324.** Հաշվել արտահայտության արժեքը, եթե a-ն բավարարում է նշված հավասարությանը.

ա) $\log_{\sqrt{3}}(14-5a)$, $|10a-27|=53$, բ) $\log_{\sqrt{2}}(3-8a)$, $|24a-27|=30$:

§5. Թվաբանական գործողություններ անվերջ փոքրերի հետ

Լեմմա 1: ***Անվերջ փոքրը սահմանափակ է:***

Այսինքն՝ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա գոյություն ունի այնպիսի M թիվ, որ կամայական բնական n-ի համար՝ $|a_n| \le M$:

Ապացուցում: Քանի որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ուրեմն գոյություն ունի այնպիսի N բնական թիվ, որից մեծ n-երի համար $|a_n| < 1$ (այստեղ վերցված է $\varepsilon = 1$): Նշանակելով M-ով $|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|$ և 1 թվերից մեծագույնը՝ կամայական բնական n-ի համար կունենանք՝ $|a_n| \le M$:

Լեմմա 2: ***Եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է և $|b_n| \le |a_n|$, $n \in \mathbf{N}$, ապա b_n հաջորդականությունը նույնպես անվերջ փոքր է:***

Լեմման անմիջականորեն հետևում է անվերջ փոքրի սահմանումից (ապացուցեք ինքնուրույն):

Լեմմա 3: ***Երկու անվերջ փոքրերի գումարը և տարբերությունը անվերջ փոքր են:***

Այսինքն՝ եթե a_n, b_n հաջորդականություններն անվերջ փոքր են, ապա $a_n + b_n$ և $a_n - b_n$ հաջորդականությունները նույնպես անվերջ փոքր են:

Ապացուցում: Դիցուք ε-ը որևէ դրական թիվ է: Այդ դեպքում գոյություն ունեն N_1 և N_2 բնական թվեր, այնպիսիք, որ

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ և } n > N_2 \Rightarrow |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Նշանակենք $N = \max\{N_1; N_2\}$: Այդ դեպքում,

$$n > N \Rightarrow |a_n \pm b_n| \le |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon:$$

Լեմմա 4: ***Սահմանափակ հաջորդականության և անվերջ փոքրի արտադրյալն անվերջ փոքր է:***

Այսինքն, եթե a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, իսկ b_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա $a_n b_n$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Ապացուցում: Քանի որ a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է, ուրեմն գոյություն ունի այնպիսի $M > 0$, որ կամայական $n \in \mathbf{N}$ համար $|a_n| < M$: Քանի որ b_n

հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ուրեմն կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի N բնական թիվ, որ

$$n > N \Rightarrow |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} :$$

Հետևաբար՝

$$n > N \Rightarrow |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon :$$

Հետևանք 1: ***Անվերջ փոքրերի արտադրյալն անվերջ փոքր է:***

Ապացուցում: Դիցուք a_n, b_n հաջորդականություններն անվերջ փոքր են: Այդ դեպքում, համաձայն 1-ին լեմմայի, a_n հաջորդականությունը սահմանափակ է: Կիրառելով 4-րդ լեմման, ստանում ենք, որ $a_n b_n$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Համանմանորեն, հաշվի առնելով, որ հաստատուն հաջորդականությունը սահմանափակ է, կստանանք.

Հետևանք 2: ***Հաստատունի և անվերջ փոքրի արտադրյալն անվերջ փոքր է:***

Օրինակ: Ցույց տանք, որ $a_n = \dfrac{n(2^n + n)}{2^n (n+1)^2}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է: Ներկայացնենք a_n-ը հետևյալ տեսքով.

$$a_n = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{2^n (n+1)^2} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{2^n} :$$

Քանի որ $\dfrac{n}{n+1}$ և $\dfrac{n^2}{(n+1)^2}$ հաջորդականությունները սահմանափակ են, իսկ $\dfrac{1}{n+1}$ և $\dfrac{1}{2^n}$ հաջորդականությունները՝ անվերջ փոքր, 3-րդ և 4-րդ լեմմաների համաձայն a_n-ը ևս կլինի անվերջ փոքր:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Սահմանափա՞կ է, արդյոք, անվերջ փոքրը:
2. Ապացուցեք, որ անվերջ փոքրերի գումարն անվերջ փոքր է:
3. Ապացուցեք, որ սահմանափակ հաջորդականության և անվերջ փոքրի արտադրյալն անվերջ փոքր է:
4. Ապացուցեք, որ անվերջ փոքրերի արտադրյալն անվերջ փոքր է:

Առաջադրանքներ

325. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել, որ վերջավոր թվով անվերջ փոքրերի գումարն անվերջ փոքր է:

326. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել, որ վերջավոր թվով անվերջ փոքների արտադրյալն անվերջ փոքր է:

327. Ապացուցել, որ $a_n = a$, $n \in \mathbf{N}$, հաջորդականությունն անվերջ փոքր է այն և միայն այն դեպքում, երբ $a = 0$:

Ապացուցել, որ a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է (328-329).

328. ա) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, բ) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n+1}$, գ) $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$,

դ) $a_n = \dfrac{\cos(n+1)}{2n}$, ե) $a_n = \dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$, զ) $a_n = \dfrac{5}{n \cdot 2^n}$:

329. ա) $a_n = \dfrac{3}{n} + \dfrac{5}{n+1}$, բ) $a_n = \dfrac{1}{2n-3} - \dfrac{4}{n+2}$, գ) $a_n = \dfrac{1}{n} + 3^{-n}$,

դ) $a_n = \dfrac{1}{n+1} - 2^{-n}$, ե) $a_n = \dfrac{3}{n(1+2^{-n})}$, զ) $a_n = \dfrac{2}{n(3+4^{-n})}$:

330. Դիցուք $a_n = \dfrac{1}{n^5}$, $b_n = \dfrac{1}{n^3}$, $c_n = \dfrac{5}{n^5}$, $n \in \mathbf{N}$: Ապացուցել, որ՝

ա) a_n, b_n, c_n հաջորդականություններն անվերջ փոքրեր են,

բ) $\dfrac{a_n}{b_n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է,

➤գ) $\dfrac{a_n}{c_n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր չէ,

➤դ) $\dfrac{b_n}{a_n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր չէ:

դ) $\dfrac{c_n}{a_n}$-ը անվերջ փոքր չէ:

* **331.** Ապացուցեք, որ հետևյալ մեծությունները սահմանափակ են.

ա) $\dfrac{\lg n}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, բ) $\dfrac{\lg x}{x}$, $x > 1$, գ) $\dfrac{\lg x}{\sqrt{x}}$, $x > 1$:

* **332.** Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ ապացուցեք, որ $\dfrac{\lg n}{n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

* **333.** ա) Ապացուցեք, որ անվերջ փոքր դրական հաջորդականությունն ունի մեծագույն և չունի փոքրագույն անդամ:

բ) Ապացուցեք, որ անվերջ փոքր բացասական հաջորդականությունն ունի փոքրագույն և չունի մեծագույն անդամ:

Կրկնության համար

Լուծել հավասարումը (334-335).

334. ա) $2 + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{x-1}$, բ) $1 + \dfrac{25}{x-7} = \dfrac{16}{x-6}$:

335. ա) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{3-x}} = 0$, բ) $\dfrac{3x^2 + 7x + 2}{\sqrt{x+1}} = 0$:

§6. Հաջորդականության սահման, e թիվը

Դարձյալ ենթադրենք, որ ունեք մի խնձոր և յուրաքանչյուր օր ուտում եք խնձորի մնացած մասի կեսը: Տեսնենք, թե ժամանակի ընթացքում, խնձորի ո՞ր մասն է ուտվում:

Ինչպես տեսանք, այս դեպքում n-րդ օրը մնում էր խնձորի $\frac{1}{2^n}$ մասը: Հետևաբար, եթե a_n-ով նշանակենք n օրում կերած մասը, ապա $a_n = 1-\frac{1}{2^n}$ (նկ. 17): Ուստի, թեև խնձորը երբեք լրիվ ուտել չի հաջողվի, սակայն նրանից, ըստ էության, ոչինչ չի մնում և այն, ժամանակի ընթացքում, ըստ էության, ամբողջությամբ ուտվում է, այսինքն a_n-ն անվերջ մոտենում է 1-ին:

$a_1 = 1-\frac{1}{2}$ $a_2 = 1-\frac{1}{2^2}$ $a_3 = 1-\frac{1}{2^3}$ $a_4 = 1-\frac{1}{2^4}$ $a_5 = 1-\frac{1}{2^5}$ 1

Նկ. 17

Այստեղ a_n հաջորդականությունը տարբերվում է 1 հաստատունից $\frac{1}{2^n}$ անվերջ փոքրով: Նման դեպքում ասում են, որ a_n հաջորդականությունը ձգտում է 1-ի:

***a* թիվը կոչվում է a_n հաջորդականության սահման, եթե $a_n - a$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:**

Եթե հաջորդականությունն ունի վերջավոր սահման, կոչվում է զուգամետ, հակառակ դեպքում կոչվում է տարամետ:

Եթե a թիվը a_n հաջորդականության սահմանն է, ապա գրում են*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ կամ } a_n \to a$$

և ասում են ***a_n-ը ձգտում է a-ի, կամ a_n-ը զուգամիտում է a-ի:***

Փաստորեն, a_n հաջորդականությունը ձգտում է a թվին, եթե ինչ-որ համարից սկսած նրա անդամների և a-ի տարբերությունը բացարձակ արժեքով փոքր է նախապես տրված կամայական ε դրական թվից՝ $|a_n - a| \le \varepsilon$: Վերջին անհավասարությունը նշանակում է, որ թվային առանցքի վրա a_n-ը պատկանում է a կետի ε-շրջակայքին՝

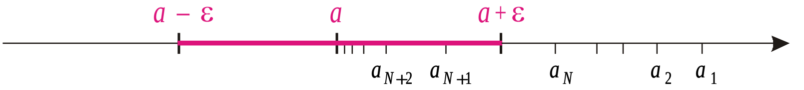
$$a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon):$$

Այստեղից կստացվի հաջորդականության սահմանի երկրաչափական մեկնա-

---

*Կարդացվում է՝ a-ն հավասար է սահման a_n, երբ n-ը ձգտում է անվերջի: Այստեղ lim-ը լատիներեն limes բառի կրճատումն է, որը նշանակում է «սահման»:

բանությունը (նկ. 18).



Նկ. 18

a թիվը a_n հաջորդականության սահմանն է, եթե a-ի կամայական շրջակայքից դուրս կարող են լինել միայն վերջավոր թվով a_n-եր:

Պարզ է, որ եթե a_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա այն զուգամետ է և նրա սահմանը 0 է՝ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

Ինքնուրույն համոզվեք, որ ճշմարիտ է հետևյալ լեմման:

Լեմմա: ***Եթե β_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ապա կամայական a թվի համար $a_n = a + \beta_n$ հաջորդականությունը զուգամետ է, և $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$:***

Օրինակ 1: $a_n = a$ հաստատուն հաջորդականությունը զուգամետ է և $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$: Իրոք, այդ դեպքում $a_n - a = 0$, $n \in \mathbf{N}$, որը, ինչպես գիտենք, անվերջ փոքր է:

Օրինակ 2: Պարզենք $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ հաջորդականության զուգամիտությունը: Քանի որ

$$a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

և $\dfrac{1}{n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ուրեմն $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$:

Օրինակ 3: Ցույց տանք, որ $a_n = (-1)^n$ հաջորդականությունը տարամետ է:

Ենթադրենք հակառակը՝ հաջորդականությունը զուգամետ է և նրա սահմանը a թիվն է:

Քանի որ $(a - 0{,}5;\ a + 0{,}5)$ միջակայքի երկարությունը 1 է, ուրեմն՝ 1 և -1 թվերից գոնե մեկը այդ միջակայքից դուրս է: Սակայն հաջորդականության բոլոր զույգ համարով անդամները հավասար են 1-ի, իսկ կենտ համարով անդամները՝ -1-ի, ուստի նշված միջակայքից դուրս կան անվերջ թվով a_n-եր: Մինչդեռ, համաձայն սահմանի երկրաչափական մեկնաբանության, $(a - 0{,}5;\ a + 0{,}5)$ միջակայքից դուրս կարող են լինել միայն վերջավոր թվով a_n-եր:

Հետևաբար՝ մեր ենթադրությունը սխալ է, այսինքն՝ $a_n = (-1)^n$ հաջորդականությունը տարամետ է:

Թեորեմ 1: ***Եթե a_n և b_n հաջորդականությունները զուգամետ են, ապա զուգամետ են նաև $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n \cdot b_n$ հաջորդականությունները, ընդ որում,***

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \times \lim\limits_{n\to\infty} b_n$:

Ապացուցում: Նշանակենք

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ և } b = \lim_{n\to\infty} b_n :$$

Ըստ սահմանի սահմանման, $\alpha_n = a_n - a$ և $\beta_n = b_n - b$ հաջորդականություններն անվերջ փոքր են: Այդ դեպքում $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$ և

$$a_n + b_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n):$$

Քանի որ անվերջ փոքրերի $\alpha_n + \beta_n$ գումարն անվերջ փոքր է, լեմմայից հետևում է, որ $a_n + b_n$ հաջորդականությունը զուգամետ է, և $a_n + b_n \to a + b$: Համանմանորեն ապացուցվում է 2-րդ հավասարությունը:

Այնուհետև՝

$$a_n \cdot b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n :$$

Կիրառելով անվերջ փոքրերի՝ նախորդ պարագրաֆում ապացուցված հատկությունները, ստանում ենք, որ $a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է: Հետևաբար՝ $a_n b_n \to ab$:

Քանի որ $b_n = p$ հաստատուն հաջորդականությունը զուգամետ է և նրա սահմանը p-ն է, թեորեմի 3-րդ կետից կստանանք.

Հետևանք: ***Եթե a_n հաջորդականությունը զուգամետ է և p-ն որևէ թիվ է, ապա $p \cdot a_n$ հաջորդականությունը նույնպես զուգամետ է և***

$$\lim_{n\to\infty} p \cdot a_n = p \lim_{n\to\infty} a_n :$$

Առանց ապացույցի ձևակերպենք զուգամետ հաջորդականությունների հարաբերության սահմանի վերաբերյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2: ***Դիցուք a_n և b_n հաջորդականությունները զուգամետ են, ընդ որում, $b_n \neq 0$, $n \in \mathrm{N}$ և $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$: Այդ դեպքում $\dfrac{a_n}{b_n}$ հաջորդականությունը նույնպես զուգամետ է և***

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} :$$

Հաջորդականությունների մեջ կարևոր դաս են կազմում մոնոտոն հաջորդականությունները:

Դիցուք a_n հաջորդականությունն աճող է: Պարզ է, որ այդ հաջորդականության բոլոր անդամները մեծ են առաջին անդամից, որտեղից հետևում է, որ հաջորդականությունը սահմանափակ է ներքևից, օրինակ՝ a_1 թվով: Պարզվում է, որ եթե այն սահմանափակ լինի նաև վերևից, ապա կլինի զուգամետ: Համանմանորեն, նվազող հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից, իսկ նաև ներքևից սահմանափակ լինելու դեպքում դառնում է զուգամետ: Այսինքն՝ տեղի ունի հետևյալ թեորեմը (որը կընդունենք առանց ապացույցի):

Թեորեմ 3: ***Մոնոտոն և սահմանափակ հաջորդականությունը զուգամետ է:***

Բերենք այս թեորեմի մի կիրառություն: Դիտարկենք

$$a_n = 1+\frac{1}{1!}+2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}, \quad n=1, 2, \ldots$$

հաջորդականությունը, որտեղ $n!$-ը (կարդացվում է n ֆակտորիալ) 1-ից մինչև n բոլոր բնական թվերի արտադրյալն է՝ $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$: Քանի որ

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)!} > a_n ,$$

ուրեմն a_n հաջորդականությունն աճող է: Մյուս կողմից, օգտվելով

$$n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n > \underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{(n-1)\ \text{հատ}} = 2^{n-1}, \;\; n=2, 3, \ldots$$

առնչությունից, ստանում ենք, որ կամայական n-ի համար՝ $\dfrac{1}{n!} \le \dfrac{1}{2^{n-1}}$ և

$$a_n \le 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 2+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}} < 3 :$$

Հետևաբար, a_n հաջորդականությունը նաև սահմանափակ է: Ուրեմն, համաձայն թեորեմ 3-ի, այն զուգամետ է՝ ունի սահման: Այդ սահմանը նշանակում են լատինական e տառով՝

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right):$$

Պարզվում է, որ e թիվը նաև հետևյալ սահմանն է.

$$\boldsymbol{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} :$$

Այս հավասարությունը մենք չենք ապացուցի: Նշենք միայն, որ e -ն իռացիոնալ թիվ է, որի առաջին նիշերն են՝

$$e = 2{,}718281828904590\ldots:$$

Հետաքրքիր է նշել, որ, ներմուծվելով »ընդամենը« որպես մի հաջորդականության սահման, e թիվը, ինչպես կտեսնենք հետագայում, կարևոր տեղ է գրավում մաթեմատիկական անալիզում, այնպես, ինչպես π թիվը՝ եռանկյունաչափությունում: Մասնավորապես, կարևոր դեր են խաղում e հիմքով աստիճանային և լոգարիթմական ֆունկցիաները:

***e* հիմքով լոգարիթմն անվանում են բնական լոգարիթմ և նշանակում են $\ln a$, այսինքն**

$$\ln a = \log_e a :$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ե՞րբ են ասում, որ a_n հաջորդականության սահմանն a թիվն է:
2. Ո՞ր հաջորդականությունն են անվանում զուգամետ:
3. Ո՞րն է անվերջ փոքր հաջորդականության սահմանը:
4. Զուգամե՞տ է, արդյոք, հաստատուն հաջորդականությունը:
5. Բերեք տարամետ հաջորդականության օրինակ:
6. Ապացուցեք, որ զուգամետ հաջորդականությունների գումարը զուգամետ է:
7. Ապացուցեք, որ զուգամետ հաջորդականությունների արտադրյալը զուգամետ է:
8. Ձևակերպեք զուգամետ հաջորդականությունների հարաբերության սահմանի վերաբերյալ թեորեմը:
9. Ներքևից սահմանափա՞կ է, արդյոք, աճող հաջորդականությունը:
10. Ձևակերպեք մոնոտոն հաջորդականության սահմանի գոյության վերաբերյալ թեորեմը:
11. Ո՞ր հաջորդականությունների սահմանն է e թիվը:
12. Ինչպե՞ս են նշանակում e հիմքով լոգարիթմը:
13. Ինչպե՞ս են անվանում e հիմքով լոգարիթմը:

Առաջադրանքներ

336. Ելնելով հաջորդականության սահմանի սահմանումից՝ ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{n+1} = 1$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{2n-1} = \dfrac{3}{2}$, գ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{2n+1} = 1$,

դ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^{n+1}}{4^n + 3^n} = 4$, ե) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n} + 2^n}{2^{2n} - 2^n} = 1$, զ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \cdot 2^{n+1}}{n \cdot 2^n - 1} = 2$:

➢**337.** Որպեսզի a_n հաջորդականությունը զուգամիտի a թվին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա $N \in \mathbf{N}$, որ $n > N$ պայմանից հետևի $|a_n - a| < \varepsilon$ անհավասարությունը: Ապացուցել:

338. Դիցուք $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$: Գտնել սահմանը.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^2 + 3x_n\right)$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2x_n^2 - x_n\right)$, գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5x_n - 1}{x_n + 1}$:

339. Դիցուք $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ և $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$: Հաշվել $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$-ը, եթե՝

ա) $x_n = \dfrac{2a_n - b_n}{a_n - 4}$, բ) $x_n = \dfrac{a_n \cdot b_n - 3}{a_n + b_n}$, գ) $x_n = \dfrac{2b_n - 4}{a_n + 1}$,

դ) $x_n = \dfrac{a_n(a_n + b_n)}{a_n + 1}$, ե) $x_n = \dfrac{b_n - 2a_n}{a_n + b_n}$, զ) $x_n = \dfrac{1 - b_n}{1 + a_n b_n}$:

➢**340.** Դիցուք a_n և b_n հաջորդականությունների անդամները ինչ-որ n_0 համարից սկսած համընկնում են՝ $a_n = b_n$, երբ $n \ge n_0$: Ապացուցել, որ եթե a_n հաջորդականությունը զուգամետ է, ապա b_n հաջորդականությունը նույնպես զուգամետ է, և $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (համեմատել առաջադրանք 316-ի հետ):

➢**341.** Եթե a_n հաջորդականությունը զուգամետ է և $b_n = a_{n+k}$, $n \in \mathbf{N}$, որտեղ k-ն որևէ բնական թիվ է, ապա b_n հաջորդականությունը նույնպես զուգամետ է, և $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (համեմատել առաջադրանք 315-ի հետ):

➢**342.** Ապացուցել, որ զուգամետ հաջորդականությունը սահմանափակ է:

343. Գտնել a_n հաջորդականության սահմանը, եթե՝

ա) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$, բ) $a_n = \dfrac{2n + \sin n}{n}$, գ) $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$,

դ) $a_n = 3 - 2^{-n}$, ե) $a_n = -3^{-n} + \dfrac{n+1}{n}$, զ) $a_n = 5^{-\frac{n}{2}} + n^{-1}$:

* **344.** Օգտվելով մոնոտոն հաջորդականության զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմից, ապացուցել հաջորդականության զուգամիտությունը.

ա) $a_n = 3^{-1} + 3^{-2} + \cdots + 3^{-n}$, բ) $a_n = 1^{-1} + 2^{-2} + \cdots + n^{-n}$,

գ) $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$, դ) $a_n = \log_2(n+1) - \log_2 n$,

ե) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$:

* **345.** Դիցուք $0 < q < 1$:

ա) Ապացուցեք, որ ինչ-որ համարից սկսած՝ $a_n = n \cdot q^n$ հաջորդականությունը մոնոտոն է:

բ) Ապացուցեք, որ $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot q^n = 0$:

գ) Ապացուցեք, որ կամայական դրական k -ի դեպքում $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \cdot q^n = 0$:

*** 346.** Օգտվելով մոնոտոն հաջորդականության զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմից, ապացուցեք, որ անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականությունը զուգամետ է և գտեք դրա սահմանը.

ա) $a_1 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n}, \quad n \in \mathbf{N}$, բ) $a_1 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \dfrac{2}{3 - a_n}, \quad n \in \mathbf{N}$,

գ) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 1}, \quad n \in \mathbf{N}$, դ) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 1}, \quad n \in \mathbf{N}$:

*** 347.** Գտեք անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը և սահմանը.

ա) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{2}, \quad n \in \mathbf{N}$,

բ) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2{,}5, \quad a_{n+2} = \dfrac{3}{2} a_{n+1} - \dfrac{1}{2} a_n, \quad n \in \mathbf{N}$:

➢348. Գտնել սահմանը.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$,

գ) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 + \dfrac{1}{n}\right)\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n}$, դ) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-2n+1}$:

*** 349.** Դիցուք a_n հաջորդականությունը զուգամետ է և $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$: Ապացուցեք, որ.

ա) Եթե $a_n \geq 0, \ n \in \mathbf{N}$, ապա $a \geq 0$:

բ) Եթե $a_n \leq 0, \ n \in \mathbf{N}$, ապա $a \leq 0$:

*** 350.** Դիցուք $a_n \leq b_n \leq c_n$, $n \in \mathbf{N}$, և $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$:

*** 351.** Դիցուք $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$: Ապացուցեք, որ՝

ա) գոյություն ունի այնպիսի N բնական թիվ, որ

$$n > N \Rightarrow a_n > 0{,}5,$$

բ) գոյություն ունի այնպիսի N բնական թիվ, որ

$$n > N \Rightarrow a_n < 1{,}2:$$

*** 352.** Օգտվելով հաջորդականության սահմանի երկրաչափական մեկնաբանությունից, ձևակերպեք « a_n հաջորդականության սահմանը a թիվն է»ասույթի ժխտումը:

***353.** Ապացուցեք, որ հաջորդականությունը տարամետ է.

ա) $a_n = 5 + (-1)^n \cdot 4$, բ) $a_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$, գ) $a_n = \cos\dfrac{\pi n}{3}$:

Կրկնության համար

Լուծել հավասարումը (354-355).

354. ա) $\ln(x+e)+\ln x=2+\ln 2$, բ) $\ln^2 x+\ln x-2=0$:

355. ա) $e^{7x^2+3x}=e^{10}$, բ) $e^{2x}+5e^x-6=0$:

§8. Սահմանների հաշվման օրինակներ

Այս պարագրաֆում մենք կքննարկենք սահմանների հաշվման առավել հաճախ հանդիպող եղանակներ:

Օրինակ 1: Գտնենք հետևյալ հաջորդականության սահմանը.

$$a_n=\frac{n^3-2n+1}{2n^3-n^2+5}:$$

n բնական արգումենտով ռացիոնալ արտահայտությունների սահմանը հաշվելու համար կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բաժանում են կոտորակում եղած n-ի ամենամեծ աստիճանի վրա: Տվյալ դեպքում դա n^3-ն է: Ստանում ենք.

$$a_n=\frac{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^3}}:$$

Քանի որ $-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}$ և $-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^3}$ հաջորդականություններն անվերջ փոքր են, ուստի

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^3}\right)=2:$$

Կիրառելով զուգամետ հաջորդականությունների քանորդի վերաբերյալ թեորեմը, ստանում ենք`

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n+1}{2n^3-n^2+5}=\frac{1}{2}:$$

Պատասխան` $\frac{1}{2}$:

Օրինակ 2: Գտնենք սահմանը` $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1001n}{n^4+10}$:

Այս դեպքում n-ի ամենամեծ աստիճանը 4-ն է: Հետևաբար,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1001n}{n^4+10}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1001}{n^3}}{1+\frac{10}{n^4}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1001}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n^4}\right)}=\frac{0}{1}=0:$$

Պատասխան` 0:

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ $a_n=\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ հաջորդականությունը ձգտում է 1-ի: Իրոք՝

$$a_n-1=\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}:$$

Քանի որ $\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}<1$ և $\dfrac{1}{n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ուրեմն a_n-1 հաջորդականությունն անվերջ փոքր է: Հետևաբար,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1:$$

Օրինակ 4: Գտնենք $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ հաջորդականության սահմանը:

Այն դեպքերում, երբ գործ ունենք երկու արմատների տարբերության հետ, հարմար է հաջորդականության անդամները բազմապատկել և բաժանել այդ տարբերության լծորդով, այսինքն՝ նույն արմատների գումարով: Այս դեպքում կստացվի՝

$$a_n=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}:$$

Հետևաբար, $|a_n|<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$: Հաշվի առնելով, որ $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է, ստանում ենք՝

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0:$$

Պատասխան՝ $0:$

Օրինակ 5: Գտնենք հետևյալ հաջորդականության սահմանը.

$$a_n=\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}:$$

Ձևափոխելով a_n-ը, ստանում ենք՝

$$a_n=\frac{3\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}{n+3-n}-\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{n+2-(n+1)}=$$
$$=\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}:$$

Հետևաբար, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

Պատասխան՝ 0:

Օրինակ 6: Գտնենք $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ հաջորդականության սահմանը: Նախ՝

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n}:$$

Այնուհետև, համարիչն ու հայտարարը բաժանելով n-ի, ստանում ենք՝

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}:$$

Հետևաբար (տե՛ս օրինակ 3-ը)՝

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}:$$

Պատասխան՝ $\frac{1}{2}$:

Օրինակ 7: Գտնենք $a_1 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$ անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության սահմանը:

Նախ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք, որ այդ հաջորդականությունն աճող է և սահմանափակ: Պարզ է, որ

$$a_2 = \sqrt{3+\sqrt{3}} > \sqrt{3} = a_1 \text{ և } a_1 < 3:$$

Ենթադրելով, որ $a_{n+1} > a_n$ և $a_n < 3$, ապացուցենք, որ

$$a_{n+2} > a_{n+1} \text{ և } a_{n+1} < 3:$$

Իրոք՝

$$a_{n+2} = \sqrt{3+a_{n+1}} > \sqrt{3+a_n} = a_{n+1} \text{ և } a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} < \sqrt{6} < 3:$$

Համաձայն մոնոտոն հաջորդականությունների զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմի, a_n հաջորդականությունը զուգամետ է: Նշանակենք $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$: Այդ դեպքում՝

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = c, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{3+a_n} = \sqrt{3+c}$$

(առաջին հավասարությունը 341-րդ առաջադրանքի մասնավոր դեպքն է, իսկ երկրորդը ապացուցվում է օրինակ 3-ի նման): Այստեղից և $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$ հավասարությունից կստանանք՝ $c = \sqrt{3+c}$, որտեղից՝ $c = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$:

Պատասխան՝ $c = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$:

Օրինակ 8: Ենթադրելով, որ $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 6}{4}$ անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականությունը զուգամետ է (համոզվեք ինքնուրույն), գտնենք նրա սահմա-նը: Նշանակելով $x = \lim_{n\to\infty} a_n$, ստանում ենք $x = \frac{x+6}{4}$ հավասարումը, որտեղից $x = 2$: Հետևաբար՝ $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$:

Պատասխան՝ 2:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս են գտնում ռացիոնալ արտահայտությամբ տրվող հաջորդականության սահմանը:
2. Ինչպե՞ս են գտնում արմատների տարբերություն պարունակող հաջորդականության սահմանը:
3. Ինչպե՞ս են գտնում անդրադարձ բանաձևով տրվող հաջորդականության սահմանը, եթե հայտնի է, որ այն գոյություն ունի:

Առաջադրանքներ

356. Գտնել a_n հաջորդականության սահմանը.

ա) $a_n = \frac{2n+1}{5n-3}$, բ) $a_n = \frac{4n-5}{8n+3}$,

գ) $a_n = \frac{5n-\sqrt{n}-3}{n+2\sqrt{n}+4}$, դ) $a_n = \frac{3n+5\sqrt[3]{n}-8}{2n-3\sqrt{n}+9}$:

357. Գտնել սահմանը.

ա) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+3n^2-200}{2n^3-2n+12}$, բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^4-1}{n-2n^4}$,

գ) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^{99}-n^{21}}{2n^{21}-4n^{99}+1}$, դ) $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^5-1}{n^5-n^3+1}$:

358. Ապացուցել, որ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է.

ա) $\frac{n-1}{1+n^2}$, բ) $\frac{n^{12}-n^{11}}{n^{11}-2n^{13}}$, գ) $\frac{1-n^3+n}{n^2+n^5}$:

➢**359.** Գտնել սահմանը.

ա) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+100}-\sqrt{n}\right)$, բ) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$,

գ) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$, դ) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n-1}$:

➢**360.** Գիտենալով, որ a_n հաջորդականությունը զուգամիտում է դրական թվի, գտնել այդ թիվը.

ա) $a_1 = 0{,}5$, $a_{n+1} = a_n(2-a_n)$, $n \in \mathbf{N}$, բ) $a_1 = \sqrt[4]{27}, \quad a_{n+1} = \sqrt[4]{27a_n}, \quad n \in \mathbf{N}$,

գ) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{17}{a_n}\right), \quad n \in \mathbf{N}$:

* **361.** Ապացուցել, որ $a_1 = \sqrt{5}$, $a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}$, $n \in \mathbf{N}$, հաջորդականությունը զուգամետ է և գտնել նրա սահմանը:

* **362.** Ապացուցել, որ $a_1 = 13$, $a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}$, $n \in \mathbf{N}$, հաջորդականությունը զուգամետ է և գտնել նրա սահմանը:

* **363.** Ապացուցել, որ $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_n + 2}$, $n \in \mathbf{N}$, հաջորդականությունը զուգամետ է և գտնել նրա սահմանը:

* **364.** Օգտվելով $\sin\alpha \le \alpha$ և $\operatorname{tg}\alpha \ge \alpha$ անհավասարություններից ($0 < \alpha < \pi/2$), ապացուցել, որ կամայական h_n անվերջ փոքրի համար՝

ա) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin h_n = 0$, բ) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos h_n = 1$, գ) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin h_n}{h_n} = 1$ $(h_n \ne 0,\ n \in \mathbf{N})$:

* **365.** Ցույց տալ, որ R շառավղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n-անկյան պարագիծը՝ $P_n = 2Rn\sin\frac{\pi}{n}$ և, օգտվելով 364 առաջադրանքի գ) հավասարությունից, ստանալ շրջանագծի երկարության բանաձևը:

* **366.** Ցույց տալ, որ R շառավղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n-անկյան մակերեսը՝ $S_n = \frac{R^2 n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ և, օգտվելով 364 առաջադրանքի գ) հավասարությունից, ստանալ շրջանի մակերեսի բանաձևը:

Կրկնության համար

Լուծել հավասարումը (367-368).

367. ա) $\sqrt{2x+2} + 3 = x$, բ) $\sqrt{x^2 + 8} = 2x + 1$:

➢ **368.** ա) $(3x^2 - 16x + 16)\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0$, բ) $(x^2 + x - 2)\sqrt{x^2 - x - 2} = 0$:

5րդ ԳԼՈՒԽ

Ֆունկցիայի անընդհատությունը: Ածանցյալ

§1. Ֆունկցիայի անընդհատությունը

Քառակուսու մակերեսը գտնելու համար անհրաժեշտ է չափել նրա կողմի երկարությունը և այն քառակուսի բարձրացնել: Իհարկե, մակերեսի ստացված արժեքի ճշգրտությունը կախված է նրանից, թե որքանով է ճիշտ չափված կողմի երկարությունը: Պարզ է, որ քառակուսու կողմի փոքր փոփոխության դեպքում նրա մակերեսը քիչ է փոխվում: Հետևաբար, եթե կողմի չափման ժամանակ թույլ տրված սխալը փոքր է, ապա մակերեսի համար ստացված արժեքը քիչ է տարբերվում մակերեսի իրական արժեքից: Այսինքն, կարելի է ասել, որ քառակուսու մակերեսն անընդհատորեն է կախված նրա կողմի երկարությունից, կամ քառակուսու մակերեսն անընդհատ ֆունկցիա է նրա կողմի երկարությունից:

Ասում են, որ f ֆունկցիան անընդհատ է իր որոշման տիրույթի x_0 կետում, եթե f-ի որոշման տիրույթում ընկած կամայական x_n հաջորդականության համար $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ պայմանից հետևում է, որ

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0): \qquad (1)$$

Սահմանի սահմանման համաձայն, ֆունկցիայի անընդհատությունն x_0 կետում նշանակում է, որ կամայական h_n անվերջ փոքրի համար

$$y_n = f(x_0 + h_n) - f(x_0)$$

հաջորդականությունն անվերջ փոքր է (եթե $x_0 + h_n \in D(f)$, $n \in \mathbf{N}$):

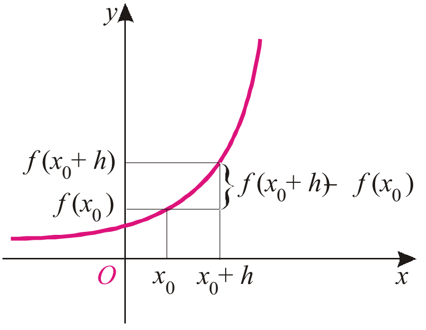
Ընդունված է $f(x_0 + h) - f(x_0)$ տարբերությունն անվանել ***արգումենտի h աճին համապատասխանող ֆունկցիայի աճ***, կամ, պարզապես՝ ***ֆունկցիայի աճ*** x_0 կետում: Այս պայմանավորվածությամբ ֆունկցիայի անընդհատությունն x_0 կետում կարելի է ձևակերպել այսպես.

Ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, եթե այդ կետում արգումենտի անվերջ փոքր աճին համապատասխանում է ֆունկցիայի անվերջ փոքր աճ:

Իհարկե, ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի որոշ կետերում կարող է լինել անընդհատ, իսկ այլ կետերում՝ չլինել:

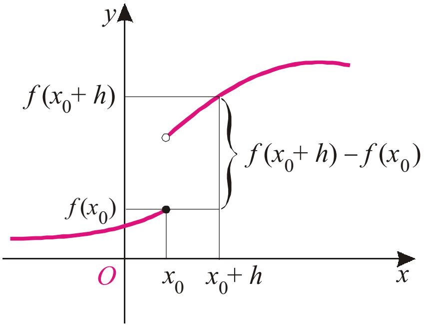
Ֆունկցիան անվանում են անընդհատ, եթե այն անընդհատ է իր որոշման տիրույթի կամայական կետում:

Օրինակ, 19, ա նկարում պատկերված ֆունկցիան անընդհատ է, իսկ 19, բ նկարում պատկերված ֆունկցիան x_0 կետում անընդհատ չէ:



ա)

Նկ. 19



բ)

Օրինակ 1: Դիցուք $f(x)=2$, $x\in[-1;1]$:

$[-1;1]$ հատվածի կամայական x_0 կետի և այդ հատվածի՝ x_0-ին ձգտող կամայական x_n հաջորդականության համար $f(x_n)=2,\ n\in\mathbf{N}$, ուստի

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=2=f(x_0):$$

Հետևաբար f-ն անընդհատ ֆունկցիա է:

Հանգունորեն կարող ենք համոզվել, որ

կամայական բազմության վրա որոշված հաստատուն ֆունկցիան անընդհատ է:

Օրինակ 2: $\boldsymbol{f(x)=x}$ ***ֆունկցիան անընդհատ է:***

Իրոք, եթե $x_0\in\mathbf{R}$ և $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, ապա

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} x_n=x_0=f(x_0):$$

Օրինակ 3: $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$ ***ֆունկցիան անընդհատ է:***

Ֆունկցիայի անընդհատությունը 0 կետում հետևում է այն փաստից, որ եթե x_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է և $x_n\geq 0$, ապա անվերջ փոքր է նաև $\sqrt{x_n}$ հաջորդականությունը (տես 319, դ առաջադրանքը):

Ենթադրենք $x_0>0,\ x_n\geq 0$ և $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$: Այդ դեպքում՝

$$f(x_n)-f(x_0)=\sqrt{x_n}-\sqrt{x_0}=\frac{x_n-x_0}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x_0}}:$$

Երբ $n\to\infty$, վերջին կոտորակի համարիչը ձգտում է 0-ի, իսկ հայտարարը փոքր չէ $\sqrt{x_0}$ -ից: Հետևաբար՝ կոտորակի սահմանը զրո է, և $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$, այսինքն՝ $f(x)=\sqrt{x}$ ֆունկցիան անընդհատ է:

Թեորեմ 1: ***Եթե f և g ֆունկցիաներն անընդհատ են x_0 կետում, ապա $f+g$, $f-g$ և $f\cdot g$ ֆունկցիաները նույնպես անընդհատ են x_0 կետում:***

Ապացուցում: Դիցուք $x_n\in D(f+g)$ և $x_n\to x_0$: Օգտվելով զուգամետ հաջորդականությունների գումարի հատկությունից և հաշվի առնելով, որ f և g ֆունկցիաներն անընդհատ են x_0 կետում, ստանում ենք՝

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n)+g(x_n)\right)=\lim_{n\to}f(x_n)+\lim_{n\to\infty}g(x_n)=f(x_0)+g(x_0):$$

Հետևաբար, $f+g$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում: Համգունորեն, կիրառելով զուգամետ հաջորդականությունների տարբերության և արտադրյալի հատկությունները, կստանանք $f-g$ և $f\cdot g$ ֆունկցիաների անընդհատությունն x_0 կետում:

Հետևանք 1: ***Անընդհատ ֆունկցիաների գումարը, տարբերությունը և արտադրյալն անընդհատ ֆունկցիաներ են:***

Այսինքն՝ եթե f և g ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն անընդհատ է իր որոշման տիրույթի բոլոր կետերում, ապա $f+g$, $f-g$ և $f\cdot g$ ֆունկցիաներն անընդհատ են իրենց որոշման տիրույթների բոլոր կետերում:

Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, այստեղից կստանանք, որ վերջավոր թվով անընդհատ ֆունկցիաների գումարն անընդհատ է (ապացուցեք ինքնուրույն):

Հետևանք 2: ***Հաստատունի և անընդհատ ֆունկցիայի արտադրյալն անընդհատ ֆունկցիա է:***

Հետևանք 3: ***Կամայական $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ բազմանդամ անընդհատ ֆունկցիա է:***

Իրոք, քանի որ $f(x)=x$ ֆունկցիան անընդհատ է, ուրեմն անընդհատ են $x,\ x^2,\ x^3,\ldots$ ֆունկցիաները՝ որպես անընդհատ ֆունկցիաների արտադրյալներ: Համաձայն 2-րդ հետևանքի՝ անընդհատ են նաև a_kx^k, $k=1,2,\ldots,n$ և a_0 ֆունկցիաները և նրանց գումարը հանդիսացող $P(x)$ բազմանդամը:

Թեորեմ 2: ***Եթե f և g ֆունկցիաներն անընդհատ են x_0 կետում և $g(x_0)\neq 0$, ապա $\frac{f}{g}$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում:***

Այս թեորեմը մենք չենք ապացուցի, սակայն կձևակերպենք նրանից բխող մի կարևոր հետևանք: Հիշենք, որ f և g ֆունկցիաների քանորդի որոշման տիրույթը $D(f)\cap\{x\in D(g): g(x)\neq 0\}$ բազմությունն է: Ուստի 2-րդ թեորեմից հետևում է

Հետևանք 4: ***Անընդհատ ֆունկցիաների քանորդն անընդհատ ֆունկցիա է:***

Քանի որ բազմանդամն անընդհատ ֆունկցիա է, այստեղից կստանանք.

Հետևանք 5: ***Ռացիոնալ արտահայտությամբ տրվող***

$$R(x)=\frac{a_k x^k+\dots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+\dots+b_1 x+b_0}$$

ֆունկցիան անընդհատ է:

Հաջորդ թեորեմը վերաբերում է համադրույթի անընդհատությանը:

Թեորեմ 3: ***Դիցուք f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, իսկ g ֆունկցիան անընդհատ է $y_0=f(x_0)$ կետում: Այդ դեպքում $F=g\circ f$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում:***

Ապացույց: Դիցուք $x_n\to x_0$, $x_n\in D(F)$: Քանի որ f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, ուրեմն $y_n=f(x_n)$ հաջորդականությունը զուգամիտում է y_0-ին: Հաշվի առնելով g ֆունկցիայի անընդհատությունը y_0 կետում, ստանում ենք՝ $g(y_n)\to g(y_0)$: Հետևաբար՝

$$F(x_n)=g(f(x_n))=g(y_n)\to g(y_0)=g(f(x_0))=F(x_0):$$

Այսինքն՝ F-ն անընդհատ է x_0 կետում:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ե՞րբ են ասում, որ $f: X\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0\in X$ կետում:
2. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում անընդհատ:
3. Բերեք անընդհատ ֆունկցիաների օրինակներ:
4. Ի՞նչն են անվանում արգումենտի h աճին համապատասխանող ֆունկցիայի աճ x_0 կետում:

5. Ձևակերպեք x_0 կետում ֆունկցիայի անընդհատությունն արգումենտի և ֆունկցիայի աճերի տերմիններով:
6. Անընդհա՞տ են արդյոք անընդհատ ֆունկցիաների գումարն ու արտադրյալը:
7. Անընդհա՞տ է արդյոք անընդհատ ֆունկցիաների քանորդը:
8. Անընդհա՞տ է արդյոք անընդհատ ֆունկցիաների համադրույթը:

Առաջադրանքներ

➢**369.** Ապացուցել, որ $f(x)=|x|$ ֆունկցիան անընդհատ է՝ ա) $x_0=1$ կետում, բ) $x_0=0$ կետում, գ) կամայական կետում:

370. Ապացուցել ֆունկցիայի անընդհատությունն x_0 կետում.

ա) $f(x)=x^2-1$, $x_0=-1$, բ) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, $x_0=2$,

գ) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $x_0=0$, դ) $f(x)=x^3-x^2$, $x_0=1$,

ե) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=1$, զ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x_0=8$:

371. Գտնել արգումենտի h աճին համապատասխանող f ֆունկցիայի աճը x_0 կետում, եթե՝

ա) $f(x)=2x^2-1$, $x_0=3$, $h=-0{,}2$,

բ) $f(x)=\dfrac{4}{x+1}$, $x_0=-3$, $h=0{,}1$,

գ) $f(x)=\cos^2 x$, $x_0=\dfrac{2\pi}{3}$, $h=\dfrac{\pi}{12}$,

դ) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$, $h=-\dfrac{\pi}{12}$:

372. Գտնել արգումենտի h աճին համապատասխանող f ֆունկցիայի աճը x կետում, եթե՝

ա) $f(x)=x^2$, բ) $f(x)=x^3$, գ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, դ) $f(x)=\sqrt{x}$:

373. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ ապացուցել x^2, x^3, $\dfrac{1}{x}$ և $\sqrt{x}$ ֆունկցիաների անընդհատությունը:

➢**374.** Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան անընդհատ է, ապա անընդհատ է նաև g ֆունկցիան, որտեղ՝

ա) $g(x)=f^2(x)$, բ) $g(x)=f^3(x)$,

գ) $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, դ) $g(x)=\sqrt{f(x)}$, ե) $g(x)=|f(x)|$,　　　　զ) $g(x)=\dfrac{f^2(x)}{f(x)-1}$:

375. Խորանարդի x կողը ստացել է h աճ: Գտնել լրիվ մակերևույթի աճը:

***376.** Ձևակերպեք ասույթի ժխտումը.

ա) « f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում» ($x_0 \in D(f)$):

բ) « f ֆունկցիան անընդհատ է»:

***377.** Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է (a,b) միջակայքում և $x_0 \in (a,b)$: Ապացուցեք, որ.

ա) Եթե x_0 կետի կամայական շրջակայքում կա x, որ $f(x)<0$, ապա գոյություն ունի x_0 -ին ձգտող x_n հաջորդականություն, որ $f(x_n)<0$, $n \in N$:

բ) Եթե $f(x_0)>0$ և f -ն անընդհատ է x_0 կետում, ապա գոյություն ունի x_0 կետի շրջակայք, որտեղ ֆունկցիայի արժեքները դրական են:

***378.** Օգտվելով 364 ա) առաջադրանքից` ապացուցեք, որ

ա) $y=\sin x$ և $y=\cos x$ ֆունկցիաներն անընդհատ են:

բ) $y=\operatorname{tg} x$ և $y=\operatorname{ctg} x$ ֆունկցիաներն անընդհատ են:

***379.** Դիցուք $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ անընդհատ ֆունկցիան այնպիսին է, որ $f(1)=5$ և կամայական x և y թվերի համար $f(x+y)=f(x)+f(y)$: Ապացուցել, որ

ա) $f(0)=0$,

բ) $f(x)$ -ը կենտ ֆունկցիա է,

գ) $f(x)=5x$, երբ $x \in \mathbf{N}$,

դ) $f(x)=5x$, երբ $x \in \mathbf{Z}$,

ե) $f(x)=5x$, երբ $x \in \mathbf{Q}$:

զ) $f(x)=5x$, երբ $x \in \mathbf{R}$:

Կրկնության համար

Լուծել հավասարումը (380-381).

380. ա) $\sqrt{3-2x}\log_2(x-1)=0$,　　　　բ) $\sqrt{x-4}\ln(x-5)=0$:

381. ա) $\log_{x-1}(3x+1)=2$,　　　　բ) $\log_x(6+x-x^2)=2$:

§2. Տարրական ֆունկցիաների անընդհատությունը

Մաթեմատիկական անալիզում կարևոր նշանակություն ունեն տարրական ֆունկ-ցիաները:

1) $f(x)=b$ հաստատուն ֆունկցիան տարրական ֆունկցիա է,

2) $f(x)=x$ ֆունկցիան տարրական ֆունկցիա է,

3) *աստիճանային, ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաները պարզական ֆունկցիաներ են,*

4) *եռանկյունաչափական և հակադարձ եռանկյունաչափական (* $y=\arcsin x$*,* $y=\arccos x$*,* $y=\mathrm{arctg}\, x$*,* $y=\mathrm{arcctg}\, x$*) ֆունկցիաները պարզական ֆունկցիաներ են,*

5) *պարզական ֆունկցիաների գումարը, արտադրյալը և քանորդը պարզական ֆունկցիաներ են,*

6) *պարզական ֆունկցիաների համադրույթը պարզական ֆունկցիա է:*

Այս սահմանումից հետևում է, որ կամայական $P(x)=a_n x^n+\cdots+a_1x+a_0$ բազմանդամ տարրական ֆունկցիա է: Տարրական ֆունկցիաներ են նաև $\sin(x^2-1)$, $\mathrm{tg}(\ln x)$, $\arcsin x+\sqrt{x}$ ֆունկցիաները:

Արդեն ապացուցել ենք, որ հաստատուն ֆունկցիան և $f(x)=x$ ֆունկցիան անընդհատ ֆունկցիաներ են: Անընդհատ ֆունկցիաներ են նաև աստիճանային, ցուցչային, լոգարիթմական, եռանկյունաչափական և հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները (մենք այս փաստը կընդունենք առանց ապացույցի): Հաշվի առնելով, որ անընդհատ ֆունկցիաների գումարը, արտադրյալը, քանորդը և համադրույթն անընդհատ ֆունկցիաներ են, ստանում ենք.

Բոլոր պարզական ֆունկցիաներն անընդհատ են:

Օրինակ 1: ա) $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիան տարրական է, քանի որ $\sqrt{x}=x^{1/2}$, իսկ $y=x^{1/2}$ աստիճանային ֆունկցիան տարրական է:

բ) $y=|x|$ ֆունկցիան տարրական է, քանի որ այն $u(x)=x^2$ և $v(x)=\sqrt{x}$ տարրական ֆունկցիաների համադրույթն է՝ $|x|=\sqrt{x^2}$:

գ) Դիցուք $f(x)=\begin{cases} x, \text{ եթե } x>0 \\ 0, \text{ եթե } x\le 0\end{cases}$, $\quad g(x)=\begin{cases} 0, \text{ եթե } x>0 \\ x, \text{ եթե } x\le 0\end{cases}$:

Այս ֆունկցիաները տարրական են, ինչը հետևում է $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$ և $g(x)=\dfrac{x-|x|}{2}$ հավասարություններից:

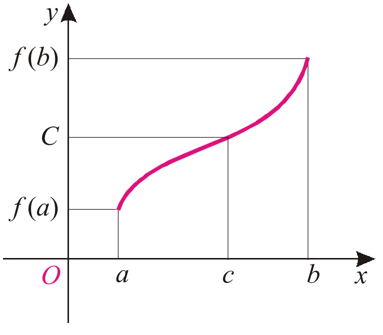
դ) $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիան տարրական է, քանի որ

$$\sqrt[3]{x}=[f(x)]^{1/3}-[-g(x)]^{1/3},$$

որտեղ f և g ֆունկցիաները սահմանված են նախորդ կետում:

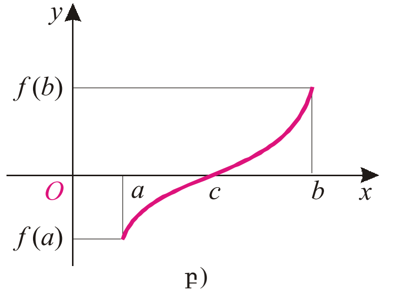
Անընդհատ ֆունկցիաներն ունեն մի շատ կարևոր հատկություն, որը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ:

Թեորեմ 1 (միջանկյալ արժեքի վերաբերյալ): ***Եթե f ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ միջակայքում, ապա կամայական C թվի համար, որն ընկած է $f(a)$ և $f(b)$ թվերի միջև, գոյություն ունի այնպիսի $c\in(a,b)$, որ $f(c)=C$*** (նկ. 20, ա)***:***



ա)

Նկ. 20



բ)

Այս թեորեմը, որը մենք կընդունենք առանց ապացուցման, բացահայտում է անընդհատ ֆունկցիաների կարևոր հատկություններից մեկը. եթե $[a;b]$ միջակայքում անընդհատ ֆունկցիան այդ հատվածի ծայրակետերում ընդունում է A և B արժեքները ($A<B$), ապա $[A,B]$ միջակայքն ամբողջությամբ ընկած է ֆունկցիայի արժեքների բազմության մեջ:

Մասնավորապես, եթե ֆունկցիան հատվածի ծայրակետերից մեկում լինի բացասական, իսկ մյուսում՝ դրական, ապա հատվածի որևէ կետում այն կդառնա զրո: Այս փաստը ձևակերպված է հաջորդ թեորեմում, որն ունի բազմաթիվ կիրառություններ:

Թեորեմ 2: ***Եթե $[a,b]$ հատվածում անընդհատ f ֆունկցիան a և b կետերում ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, ապա գոյություն ունի այնպիսի $c\in(a,b)$, որ $f(c)=0$:***

Երկրաչափորեն այս թեորեմը մեկնաբանվում է հետևյալ կերպ.

եթե $[a;b]$ հատվածում անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկի ծայրակետերը աբսցիսների առանցքի տարբեր կողմերում են, ապա գրաֆիկը հատում է աբսցիսների առանցքը (a,b) տեղամասում (նկ. 20, բ)***:***

Օրինակ 2: Ցույց տանք, որ $2^{x+2}=5x^2+2x+3$ հավասարումը $(0;1)$ միջակայքում ունի զրոն մեկ արմատ:

Դիտարկենք $f(x)=2^{x+2}-5x^2-2x-3$ ֆունկցիան: Այն անընդհատ է $[0;1]$ միջակայքում, և $f(0)=1>0$, $f(1)=-2<0$: Համաձայն 2-րդ թեորեմի, գոյություն ունի

$(0;1)$ միջակայքին պատկանող այնպիսի c թիվ, որ $f(c)=0$, այսինքն` c-ն տրված հավասարման արմատ է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիաներն են անվանում տարրական:

2. Տարրական ֆունկցիա՞ է արդյոք $f(x)=|x|$ ֆունկցիան, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիան:

Առաջադրանքներ

Համոզվեք, որ f-ը տարրական ֆունկցիա է և գտեք դրա որոշման տիրույթը (382-383).

382. ա) $f(x)=x+\sin x$, բ) $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{\sin x}$,

գ) $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{1}{x}$, դ) $f(x)=\arccos(x+2)$:

383. ա) $f(x)=\sin\dfrac{x+1}{x-1}+\ln x$, բ) $f(x)=e^{x+5}+\dfrac{\cos(\arcsin x)}{x}$,

գ) $f(x)=\log_x(x+1)$, դ) $f(x)=\operatorname{tg}\ln x$:

* **384.** Ապացուցեք, որ եթե f և g ֆունկցիաները տարրական են, ապա տարրական են նաև $F(x)=\max\{f(x), g(x)\}$, $G(x)=\min\{f(x), g(x)\}$ ֆունկցիաները:

385. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից` ապացուցեք, որ հետևյալ ֆունկցիաները տարրական են.

ա) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{եթե } x\ge 1 \\ 1, & \text{եթե } x<1 \end{cases}$, բ) $f(x)=\begin{cases} 4x, & \text{եթե } x\le 2 \\ 8, & \text{եթե } x>2 \end{cases}$,

գ) $f(x)=\begin{cases} 3x, & \text{եթե } x\ge 0 \\ x, & \text{եթե } x<0 \end{cases}$, դ) $f(x)=\begin{cases} 5x-3, & \text{եթե } x\ge 2 \\ x+5, & \text{եթե } x<2 \end{cases}$:

Հիմնավորեք, որ հետևյալ ֆունկցիաները տարրական ֆունկցիաներ են. (386-387).

* **386.** ա) $f(x)=\sqrt[5]{x}$, բ) $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\in N$,

գ) $f(x)=x^x$, $x>0$, դ) $f(x)=1$, $x\in R\setminus\{0\}$,

* **387.** ա) $f(x)=x$, $x\in(0;\infty)$, բ) $f(x)=x$, $x\in[-1;1]$,

գ) $f(x)=x^2$, $x\ge 0$, դ) $f(x)=x^2$, $x>0$:

Ստուգել, որ հավասարումը նշված միջակայքում ունի գոնե մեկ արմատ (388-389).

388. ա) $x^3+5x^2-7=0$, $[1;2]$, բ) $x^4+6x^3-1=0$, $[0;1]$,

գ) $2\cos x-x=0$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, դ) $\ln(x+5)-5x=0$, $[-4;4]$:

* **389.** ա) $16x^2 - 2\operatorname{tg} x - 7 = 0, \quad \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, բ) $x^3 + \ln x - 20 = 0, \quad (0; e)$:

390. Ապացուցել, որ նշված միջակայքում հավասարումն ունի առնվազն երկու արմատ.

ա) $2x^2 - 3\cos x + 1 = 0, \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, բ) $\lg(100x^2 + 1) - x - 1 = 0, \quad [0; 2]$:

* **391.** Ապացուցել, որ հավասարումն ունի առնվազն երկու արմատ.

ա) $2x^2 + 3\sin x - 1 = 0$, բ) $2^x - x - 2 = 0$:

Կրկնության համար

392. Երեք բանվոր միասին աշխատելով՝ երեք օրում պատրաստում են 129 դետալ. ընդ որում՝ առաջինը երկու օրում պատրաստում է այնքան դետալ, որքան երրորդը երեք օրում, իսկ երկրորդը հինգ օրում պատրաստում է այնքան, որքան առաջինը վեց օրում: Քանի՞ դետալ է պատրաստում երկրորդ բանվորը մեկ օրում:

393. Երեք տրակտոր աշխատելով միասին՝ չորս օրում վարում են 248 հա: Երկրորդ տրակտորը երկու օրում վարում է 2 հա պակաս, քան առաջինը և երրորդը վարում են միասին մեկ օրում: Երրորդ տրակտորը 5 օրում վարում է այնքան, որքան երկրորդը 6 օրում: Օրական քանի՞ հեկտար է վարում յուրաքանչյուր տրակտորը:

§3. Ակնթարթային արագություն և արագացում

Գիտեք, որ հաստատուն արագությամբ շարժվող մարմնի արագությունը հավասար է որոշակի ժամանակում նրա անցած ճանապարհի և այդ ժամանակի հարաբերությանը: Սակայն բնության մեջ մարմինները ավելի հաճախ շարժվում են ոչ հավասարաչափ: Օրինակ, նկատած կլինեք, որ մեքենայի շարժման ընթացքում նրա արագաչափի ցուցմունքն անընդհատ փոփոխվում է: Տեսնենք, թե ինչպես կարելի է որոշել ոչ հավասարաչափ շարժվող մարմնի արագությունը:

Դիցուք նյութական կետը շարժվում է կոորդինատային ուղղով $s(t)$ օրենքով, այսինքն՝ ժամանակի t պահին այն գտնվում է $s(t)$ կետում ($0 \le t < \infty$): Գտնենք t_0 պահին $V(t_0)$ արագությունը:

Կետը t_0-ից $t_0 + h$ ժամանակահատվածում անցնում է $s(t_0 + h) - s(t_0)$ ճանապարհ: Այդ ժամանակահատվածում կետի ***միջին արագությունը*** կլինի՝

$$\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}: \tag{1}$$

Առաջին պարագրաֆում $s(t_0 + h) - s(t_0)$ մեծությունն անվանել ենք արգումենտի h աճին համապատասխանող $s(t)$ ֆունկցիայի աճ t_0 կետում: Փաստորեն h ժամանակահատվածում կետի միջին արագությունն այդ ժամանակահատվածում «ճանապարհի աճի» հարաբերությունն է «ժամանակի աճին»:

Պարզ է, որ ինչքան փոքր լինի h ժամանակահատվածը, այնքան միջին արագությունը մոտ կլինի t_0 պահին կետի $V(t_0)$ արագությանը: Այսինքն՝ անվերջ փոքրացնելով h ժամանակահատվածը, կարող ենք ստանալ կետի ճշգրիտ արագությունը t_0 պահին, ինչն անվանում են ***ակնթարթային արագություն***: Այսպիսով, նյութական կետի ակնթարթային արագությունը t_0 պահին որոշվում է

$$V(t_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{s(t_0+h_n)-s(t_0)}{h_n}$$

բանաձևով, որտեղ h_n-ն անվերջ փոքր է ($h_n\neq 0,\ n\in\mathbf{N}$):

Օրինակ 1: Դիցուք ուղղագիծ շարժվող մարմինը շարժման առաջին t վայրկյանում անցնում է $s(t)=3t^2+2t$ մետր ճանապարհ: Գտնենք մարմնի՝

ա) միջին արագությունը $[10;11]$ ժամանակահատվածում,

բ) ակնթարթային արագությունը 10-րդ վայրկյանին,

գ) ակնթարթային արագությունը 11-րդ վայրկյանին:

ա) Միջին արագությունը շարժման 11-րդ վայրկյանում ($[10;11]$ ժամանակահատվածում) կլինի՝

$$\frac{s(11)-s(10)}{1}=3\cdot 11^2+2\cdot 11-3\cdot 10^2-2\cdot 10=65 \text{ (մ/վրկ):}$$

բ) Դիցուք h_n-ն անվերջ փոքր է: Այդ դեպքում

$$\frac{s(10+h_n)-s(10)}{h_n}=\frac{3\cdot(10+h_n)^2+2\cdot(10+h_n)-3\cdot 10^2-2\cdot 10}{h_n}=$$

$$=\frac{62\cdot h_n+3\cdot h_n^2}{h_n}=62+3h_n:$$

Քանի որ $\lim\limits_{n\to\infty}(62+3h_n)=62$, մարմնի ակնթարթային արագությունը շարժման 10-րդ վայրկյանին 62 մ/վրկ է:

գ) Հանգունորեն կստանանք՝

$$\frac{s(11+h_n)-s(11)}{h_n}=68+3h_n,$$

ուստի մարմնի ակնթարթային արագությունը շարժման 11-րդ վայրկյանին 68 մ/վրկ է: Ինչպես տեսանք, մարմինը շարժվում է ոչ հավասարաչափ: Նրա միջին արագությունը շարժման 11-րդ վայրկյանում ավելի մեծ է, քան ակնթարթային արագությունը 10-րդ վայրկյանին և ավելի փոքր, քան ակնթարթային արագությունը 11-րդ վայրկյանին:

Այժմ ենթադրենք, թե նյութական կետը շարժվում է կոորդինատային ուղղով և հայտնի է ժամանակի կամայական t պահին կետի $V(t)$ արագությունը: Գտնենք t_0 պահին կետի $a(t_0)$ արագացումը:

Կետի արագության փոփոխությունը t_0 -ից t_0+h ժամանակահատվածում կլինի $V(t_0+h)-V(t_0)$: Հետևաբար՝ այդ ժամանակահատվածում ***միջին արագացումը*** կլինի՝

$$\frac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}:$$

Անվերջ փոքրացնելով h ժամանակահատվածը՝ կստանանք կետի ճշգրիտ արագացումը t_0 պահին, ինչն անվանում են ***ակնթարթային արագացում:*** Այսպիսով՝ նյութական կետի ակնթարթային արագությունը t_0 պահին որոշվում է

$$a(t_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{V(t_0+h_n)-V(t_0)}{h_n}$$

բանաձևով, որտեղ h_n -ն անվերջ փոքր է ($h_n\neq 0,\ n\in\mathbf{N}$):

Օրինակ 2: Դիցուք ուղղագիծ շարժվող մարմնի արագությունը շարժման t -րդ վայրկյանին որոշվում է $V(t)=t^3+5t$ (մ/վրկ) բանաձևով: Գտնենք մարմնի՝

ա) միջին արագացումը [4, 5] ժամանակահատվածում,

բ) ակնթարթային արագացումը 4-րդ վայրկյանին:

ա) Միջին արագացումը շարժման 5-րդ վայրկյանում կլինի՝

$$\frac{V(4{,}5)-V(4)}{0{,}5}=2\left(4{,}5^3+4\cdot 4{,}5-4^3-4\cdot 4\right)=58{,}25\ (\text{մ/վրկ}^2):$$

բ) Դիցուք h_n -ն անվերջ փոքր է: Այդ դեպքում

$$\frac{V(4+h_n)-V(4)}{h_n}=\frac{\cdot(4+h_n)^3+4\cdot(4+h_n)-4^3-4\cdot 4}{h_n}=$$

$$=\frac{52\cdot h_n+12\cdot h_n^2+h_n^3}{h_n}=52+12\cdot h_n+h_n^2:$$

Քանի որ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(52+12\cdot h_n+h_n^2\right)=52$, մարմնի ակնթարթային արագացումը 4-րդ վայրկյանին 52մ/վրկ^2 է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս են գտնում հավասարաչափ շարժվող մարմնի արագությունը:
2. Ինչպե՞ս են գտնում մարմնի միջին արագությունը:
3. Ինչպե՞ս որոշել $s(t)$ օրենքով շարժվող մարմնի ակնթարթային արագությունը t_0 պահին:
4. Ինչպե՞ս են գտնում մարմնի ակնթարթային արագացումը, եթե հայտնի է, թե ինչ օրենքով է փոփոխվում նրա արագությունը:

Առաջադրանքներ

Գտեք $s(t)$ օրենքով շարժվող մարմնի միջին արագությունը Δ ժամանակահատվածում, եթե ճանապարհը տրված է մետրերով, իսկ ժամանակը՝ վայրկյաններով (394-396).

394. $s(t)=2t^2$, ա) $\Delta=[1;\,2]$, բ) $\Delta=[1;\,1{,}5]$, գ) $\Delta=[1;\,1{,}2]$:

395. $s(t)=3t^2+t$, ա) $\Delta=[2;\,3]$, բ) $\Delta=[2;\,2{,}25]$, գ) $\Delta=[2;\,2{,}1]$:

396. $s(t)=t^3+t$, ա) $\Delta=[3;\,3{,}5]$, բ) $\Delta=[3;\,3{,}3]$, գ) $\Delta=[3;\,3{,}1]$:

Գտեք $s(t)$ օրենքով շարժվող մարմնի միջին արագությունը Δ ժամանակահատվածում և ակնթարթային արագությունը t_0 պահին, եթե ճանապարհը տրված է մետրերով, իսկ ժամանակը՝ վայրկյաններով (397-399).

397. $s(t)=6t+7{,}5$, ա) $\Delta=[0;\,2]$, $t_0=1$, բ) $\Delta=[1;\,4]$, $t_0=2$:

398. $s(t)=t^2$, ա) $\Delta=[4;\,6]$, $t_0=5$, բ) $\Delta=[2;\,5]$, $t_0=2$:

➢**399.** $s(t)=t^3+5t^2$ ա) $\Delta=[3;\,5]$, $t_0=3{,}5$, բ) $\Delta=[0;\,1]$, $t_0=1$:

Գտեք մարմնի միջին արագացումը Δ ժամանակահատվածում և ակնթարթային արագացումը t_0 պահին, եթե նրա արագությունը փոխվում է $V(t)$ օրենքով (400-403).

400. $V(t)=7t+5$ ա) $\Delta=[1;\,5]$, $t_0=3$, բ) $\Delta=[8;\,10]$, $t_0=9$:

401. $V(t)=2t+3t^2$, ա) $\Delta=[0;\,4]$, $t_0=4$, բ) $\Delta=[3;\,4]$, $t_0=3$:

➢**402.** $V(t)=t^3+5t^2$, ա) $\Delta=[3;\,5]$, $t_0=3{,}5$, բ) $\Delta=[0;\,1]$, $t_0=1$:

➢**403.** $V(t)=t^3+6t$, ա) $\Delta=[5;\,6]$, $t_0=5{,}5$, բ) $\Delta=[4;\,6]$, $t_0=5$:

Կրկնության համար

➢**404.** A և B վայրերից միաժամանակ միմյանց ընդառաջ շարժվեցին երկու մոտոցիկլավար: Առաջինը B հասավ հանդիպումից $2{,}5$ ժ անց, իսկ երկրորդը A հասավ հանդիպումից $1{,}6$ ժ անց: Քանի՞ ժամ տևեց յուրաքանչյուր մոտոցիկլավարի ուղևորությունը:

➢**405.** A վայրից դեպի B վայրը դուրս եկավ բեռնատար մեքենան: Միաժամանակ B-ից A շարժվեց մարդատար մեքենան: Բեռնատարը 1 ժ հետո հանդիպեց մարդատարին և ևս $1{,}5$ ժ հետո հասավ B վայր: Որքա՞ն ժամանակ ծախսեց մարդատար մեքենան B-ից A ճանապարհին:

§4. Ածանցյալ

Ինչպես տեսանք նախորդ պարագրաֆում, ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերության սահմանն ունի որոշակի ֆիզիկական իմաստ:

Դիտարկենք $y=f(x)$ ֆունկցիան և ենթադրենք x_0-ն դրա որոշման տիրույթի ներքին կետ է, այսինքն՝ կա x_0-ի շրջակայք, որն ընկած է $D(f)$-ում:

Ասում են, որ f ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, եթե կամայական h_n անվերջ փոքրի համար* զուգամետ է

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} \qquad (1)$$

հաջորդականությունը:

Եթե f ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, ապա (1) հաջորդականության սահմանն անվանում են f ֆունկցիայի ածանցյալ x_0 կետում և նշանակում $f'(x_0)$ (կարդացվում է՝ էֆ շտրիխ x_0)

$$f'(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}:$$

Դիցուք D-ն այն բազմությունն է, որին պատկանող կետերում $y=f(x)$ ֆունկցիան ածանցելի է: Այդ բազմության յուրաքանչյուր x կետի համապատասխանեցնելով $f'(x)$ թիվը, կստանանք D բազմության վրա որոշված ֆունկցիա: Այդ ֆունկցիան անվանում են $y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ և նշանակում՝ f' կամ y':

Նախորդ պարագրաֆում փաստորեն ապացուցեցինք, որ ածանցյալն ունի հետևյալ ***ֆիզիկական իմաստները***.

ա) $s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող մարմնի $V(t)$ արագությունը ժամանակի t պահին հավասար է $s(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալին՝

$$V(t)=s'(t):$$

բ) Եթե ուղղագիծ շարժվող մարմնի արագությունը փոխվում է $V(t)$ օրենքով, ապա դրա $a(t)$ արագացումը ժամանակի t պահին հավասար է ֆունկցիայի ածանցյալին՝

$$a(t)=V'(t):$$

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=a$ հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը:

Ցանկացած x_0 կետի և կամայական h_n անվերջ փոքրի համար

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\frac{a-a}{h_n}=0:$$

Հետևաբար, ***հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը զրո է***:

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x)=kx+b$ գծային ֆունկցիայի ածանցյալը:

Ցանկացած x կետի և կամայական h_n անվերջ փոքրի համար

---

* Այսպեղ և սպորև դիտարկված h_n անվերջ փոքրերն այնպիսին են, որ կամայական n-ի դեպքում $h_n\neq 0$ և $x_0+h_n\in D(f)$:

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\frac{k(x+h_n)+b-kx-b}{h_n}=k:$$

Հետևաբար,

$$(kx+b)'=k:$$

Օրինակ 3: Գտնենք $f(x)=x^2$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
Պարզ է, որ

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\frac{(x+h_n)^2-x^2}{h_n}=2x+h_n\to 2x,$$

որտեղից ստանում ենք՝

$$(x^2)'=2x:$$

Օրինակ 4: Գտնենք $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը զրոյից տարբեր x կետում: Այս դեպքում՝

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\frac{\dfrac{1}{x+h_n}-\dfrac{1}{x}}{h_n}=-\frac{1}{x(x+h_n)}:$$

Եթե h_n-ն անվերջ փոքր է, ապա $\lim\limits_{n\to\infty}(x+h_n)=x$: Կիրառելով զուգամետ հաջորդականությունների քանորդի սահմանի վերաբերյալ թեորեմը, կստանանք՝

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\to-\frac{1}{x^2}:$$

Այսպիսով, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան ածանցելի է իր որոշման տիրույթի բոլոր կետերում և

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}:$$

Օրինակ 5: Գտնենք $f(x)=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը զրոյից տարբեր x կետում: Այս դեպքում՝

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\frac{\sqrt{x+h_n}-\sqrt{x}}{h_n}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+h_n}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h_n}+\sqrt{x}\right)}{h_n\left(\sqrt{x+h_n}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+h_n}+\sqrt{x}}:$$

Այստեղից, հաշվի առնելով, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x+h_n}=\sqrt{x}$, ստանում ենք՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}=\frac{1}{2\sqrt{x}}:$$

Այսպիսով՝

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}:$$

Թեորեմ: *Եթե ֆունկցիան ածանցելի է որևէ կետում, ապա այդ կետում ֆունկցիան անընդհատ է:*

Ապացուցում: Եթե f ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, ապա կամայական h_n անվերջ փոքրի համար

$$\beta_n = \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} - f'(x_0)$$

հաջորդականությունն անվերջ փոքր է: Այստեղից ստանում ենք՝

$$f(x_0+h_n)-f(x_0) = f'(x_0)\cdot h_n + \beta_n \cdot h_n: \qquad (3)$$

Քանի որ h_n և β_n հաջորդականություններն անվերջ փոքր են, ուրեմն $f(x_0+h_n)-f(x_0)$ հաջորդականությունը նույնպես անվերջ փոքր է: Հետևաբար՝ f ֆունկցիան x_0 կետում անընդհատ է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ե՞րբ են ասում, որ $y = f(x)$ ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում:
2. Ո՞րն է x_0 կետում $y = f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
3. Ինչպե՞ս է որոշվում $y = f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ ֆունկցիան:
4. Ի՞նչ ֆիզիկական իմաստներ ունի ածանցյալը:
5. Ինչի՞ է հավասար հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը:
6. Ինչի՞ է հավասար $y = x$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
7. Ինչի՞ է հավասար $f(x) = x^2$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
8. Ինչի՞ է հավասար $f(x) = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
9. Ինչի՞ է հավասար $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Առաջադրանքներ

Գտնել f ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում (406-410).

406. $f(x)=5$, ա) $x_0=2$, բ) $x_0=-500$, գ) $x_0=12$:

407. $f(x)=3x-2$, ա) $x_0=3$, բ) $x_0=-8$, գ) $x_0=21{,}6$:

408. $f(x)=x^2$, ա) $x_0=7{,}5$, բ) $x_0=-9{,}25$, գ) $x_0=32{,}5$:

409. $f(x)=\frac{1}{x}$, ա) $x_0=0{,}5$, բ) $x_0=-1$, գ) $x_0=3$:

410. $f(x)=\sqrt{x}$, ա) $x_0=0{,}25$, բ) $x_0=6{,}25$, գ) $x_0=12{,}25$:

Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից՝ գտնել $f'(x_0)$-ն (411-414).

411. $f(x)=2x^2-1$, ա) $x_0=2$, բ) $x_0=-3{,}75$, գ) $x_0=0{,}25$:

➤**412.** $f(x)=x^3$, ա) $x_0=1$, բ) $x_0=-4$, գ) $x_0=3$:

➤**413.** $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$, ա) $x_0=-4$, բ) $x_0=0$, գ) $x_0=2$:

➤**414.** $f(x)=\sqrt{x-4}$, ա) $x_0=5$, բ) $x_0=6$, գ) $x_0=8$:

➤**415.** Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից՝ գտեք ֆունկցիայի ածանցյալը.

ա) $y=5x-3$, բ) $y=x^2+7x$, գ) $y=x^3-2x$, դ) $y=\sqrt{x+3}$:

Գտնեք $s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող մարմնի ակնթարթային արագությունը ժամանակի t_0 պահին, եթե ճանապարհը տրված է մետրերով, իսկ ժամանակը՝ վայրկյաններով (416-417).

416. $s(t)=t^2-2t$ ա) $t_0=3$, բ) $t_0=5$, գ) $t_0=1$:

417. $s(t)=\dfrac{1}{t+1}$, ա) $t_0=1$, բ) $t_0=2$, գ) $t_0=3$:

418. Գտեք ուղղագիծ շարժվող մարմնի արագացումը t_0 պահին, եթե նրա արագությունը փոխվում է $V(t)=\sqrt{2t}$ օրենքով.

ա) $t_0=2$, բ) $t_0=8$, գ) $t_0=18$:

➤**419.** Գտեք $s(t)=t^3+2t^2$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող մարմնի $V(t)$ ակնթարթային արագությունը ժամանակի կամայական t պահին և արագացումը t_0 պահին.

ա) $t_0=1$, բ) $t_0=2$, գ) $t_0=3$:

***420.** ա) Ապացուցել, որ պարբերական ֆունկցիայի ածանցյալը պարբերական ֆունկցիա է:
բ) Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե ֆունկցիայի ածանցյալը պարբերական է, ապա ֆունկցիան նույնպես պարբերական է: Բերել համապատասխան օրինակ:

Կրկնության համար

Լուծել անհավասարումը (421-422).

➤**421.** ա) $x^4-5x^2-6>0$, բ) $x^4-10x^2+9\le 0$:

➤**422.** ա) $\log_{0,5}(2^x-6)+x-2\ge 0$, բ) $\log_5(25^x-4)-2x+1<0$:

§5. Երկու ֆունկցիաների գումարի և արտադրյալի ածանցման կանոնները

Այս պարագրաֆում կսովորենք երկու ֆունկցիաների գումարի, տարբերության և արտադրյալի ածանցման (ածանցյալի հաշվման) կանոնները:

Թեորեմ 1: ***Եթե f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են որևէ կետում, իսկ k-ն հաստատուն է, ապա $k \cdot f$, $f+g$ և $f-g$ ֆունկցիաները նույնպես ածանցելի են այդ կետում, ընդ որում՝***

$$(k \cdot f)' = k \cdot f', \qquad (f+g)' = f' + g', \qquad (f-g)' = f' - g':$$

Ապացուցում: Դիցուք f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են x կետում, և h_n-ը կամայական անվերջ փոքր է: Օգտվելով զուգամետ հաջորդականությունների հատկություններից, ստանում ենք՝

$$\frac{kf(x+h_n)-kf(x)}{h_n} = k\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \to kf'(x),$$

այսինքն՝ $(k \cdot f)' = k \cdot f'$:

Ապացուցենք գումարի ածանցման կանոնը.

$$\frac{\left(f(x+h_n)+g(x+h_n)\right)-\left(f(x)+g(x)\right)}{h_n} =$$

$$= \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} + \frac{g(x+h_n)-g(x)}{h_n} \to f'(x)+g'(x):$$

Տարբերության ածանցման կանոնը ապացուցվում է համանմանորեն:

Այս թեորեմն ունի հետևյալ ֆիզիկական մեկնաբանությունը: Դիցուք գետափնյա նավամատույցից միաժամանակ սկսում են շարժվել լաստն ու շոգենավը: Ենթադրենք ժամանակի կամայական t պահին շոգենավի հեռավորությունը լաստից $s_1(t)$ է, իսկ լաստի հեռավորությունը նավամատույցից՝ $s_2(t)$: Դա կնշանակի, որ շոգենավը լաստից հեռանում է $V_1(t)=s_1'(t)$ արագությամբ, իսկ լաստը նավամատույցից՝ $V_2(t)=s_2'(t)$ արագությամբ: Պարզ է, որ եթե լաստն ու շոգենավը շարժվեն նույն ուղղությամբ, ապա t պահին շոգենավի հեռավորությունը նավամատույցից կլինի՝ $s(t)=s_1(t)+s_2(t)$, իսկ եթե շարժվեն հակառակ ուղղություններով, ապա՝ $s(t)=s_1(t)-s_2(t)$: Հետևաբար, եթե լաստն ու շոգենավը շարժվեն նույն ուղղությամբ, ապա շոգենավը նավամատույցից կհեռանա

$$V(t)=s'(t)=s_1'(t)+s_2'(t)=V_1(t)+V_2(t)$$

արագությամբ, իսկ հակառակ ուղղություններով շարժվելու դեպքում՝

$$V(t)=s'(t)=s_1'(t)-s_2'(t)=V_1(t)-V_2(t)$$

արագությամբ:

Թեորեմ 2: ***Եթե f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են որևէ կետում, ապա այդ կետում ածանցելի է նաև $f\cdot g$ ֆունկցիան, ընդ որում՝***

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'\text{:}$$

Ապացուցում : Դիցուք f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են x կետում, և h_n-ը կամայական անվերջ փոքր է: Հեշտ է ստուգել, որ

$$f(x+h_n)\cdot g(x+h_n)-f(x)\cdot g(x)=$$
$$=g(x+h_n)\cdot[f(x+h_n)-f(x)]+f(x)\cdot[g(x+h_n)-g(x)]\text{:} \qquad (1)$$

Քանի որ g ֆունկցիան x կետում ածանցելի է, ուրեմն այն անընդհատ է x կետում: Հետևաբար,

$$\lim_{n\to\infty} g(x+h_n)=g(x)\text{:} \qquad (2)$$

Օգտվելով զուգամետ հաջորդականությունների գումարի և արտադրյալի վերաբերյալ թեորեմից՝ (1) և (2) առնչություններից ստանում ենք.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h_n)\cdot g(x+h_n)-f(x)\cdot g(x)}{h_n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty} g(x+h_n)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}+f(x)\lim_{n\to\infty}\frac{g(x+h_n)-g(x)}{h_n}=$$
$$=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\text{:}$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: ***Մեկից մեծ կամայական n բնական թվի համար***

$$(x^n)'=nx^{n-1}\text{:} \qquad (3)$$

Ապացուցում: Կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը: Երբ $n=2$, պնդումը ճիշտ է, քանի որ, ինչպես գիտենք,

$$(x^2)'=2x=2x^{2-1}\text{:}$$

Ենթադրենք (3) բանաձևը ճիշտ է $n=k$ դեպքում, այսինքն՝ $(x^k)'=kx^{k-1}$: Ապացուցենք $n=k+1$ դեպքում՝ $(x^{k+1})'=(k+1)x^k$: Կիրառելով արտադրյալի ածանցման կանոնը, ստանում ենք՝

$$(x^{k+1})'=(x^k\cdot x)'=(x^k)'\cdot x+x^k\cdot(x')=kx^{k-1}\cdot x+x^k=(k+1)x^k\text{:}$$

Նկատենք, որ եթե $x\neq 0$, ապա (3) բանաձևը ճիշտ է նաև $n=0$ և $n=1$ դեպքերում:

Օրինակ 1: Գտնենք $y = x^4 - 2x^3 + 5x + 12$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
Կիրառելով (3) բանաձևը և 1-ին թեորեմը, ստանում ենք՝

$$(x^4 - 2x^3 + 5x + 12)' = (x^4)' - 2(x^3)' + 5(x)' + (12)' = 4x^3 - 6x^2 + 5:$$

Օրինակ 2: Գտնենք $y = (3x+1)(1-2\sqrt{x})$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
Կիրառենք արտադրյալի ածանցման կանոնը.

$$y' = (3x+1)' \cdot (1-2\sqrt{x}) + (3x+1)\cdot(1-2\sqrt{x})' =$$

$$= 3(1-2\sqrt{x}) + (3x+1)\cdot(-2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = 3 - 9\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{x}:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչի՞ է հավասար հաստատունի և ֆունկցիայի արտադրյալի ածանցյալը:
2. Ինչի՞ է հավասար ֆունկցիաների գումարի ածանցյալը:
3. Ինչի՞ է հավասար ֆունկցիաների տարբերության ածանցյալը:
4. Ինչի՞ է հավասար ֆունկցիաների արտադրյալի ածանցյալը:
5. Ապացուցեք $(x^n)' = nx^{n-1}$ բանաձևը:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը (423-425).

423. ա) $f(x) = x^2 + 5x$, բ) $f(x) = 3x - x^2 + 7$,
գ) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2x$, դ) $f(x) = 9 - x^5 + x^3$:

424. ա) $f(x) = 4\sqrt{x} - x^3$, բ) $f(x) = \frac{5}{x} - \sqrt{x}$,
գ) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, դ) $f(x) = 2x + \sqrt{x} - \frac{2}{x}$:

425. ա) $f(x) = \sqrt{x}(x^3 - 2x^2)$, բ) $f(x) = \frac{1}{x}\cdot(2 + 3x - x^3)$,
գ) $f(x) = \frac{1}{x}(3 - \sqrt{x})$, դ) $f(x) = (2x-1)(\sqrt{x} - 1)$:

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը նշված կետում (426-428).

426. $f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 5x$, ա) $x_0 = 1$, բ) $x_0 = 4$:

427. $f(x) = 2x^3 - \sqrt{2x} - \frac{2}{x}$, ա) $x_0 = 0{,}5$, բ) $x_0 = 2$:

428. $f(x) = \sqrt{3x} - 3x^2 - 1021$, ա) $x_0 = 3$, բ) $x_0 = 12$:

429. Լուծել $f'(x) = 0$ հավասարումը.

ա) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2{,}5x^2 + 6x - 1$, բ) $f(x) = x^5 - 10x^3 + 40x$,
գ) $f(x) = \frac{1}{x} + 9x$, դ) $f(x) = \frac{4}{x} + 25x - 6$:

430. Լուծել $f'(x)>0$ անհավասարումը.

ա) $f(x)=x^3-6x^2-63x-2$, բ) $f(x)=x^5-20x^3$,

գ) $f(x)=3x^4-20x^3+36x^2-7$, դ) $f(x)=x^4-8x^3+18x^2+29$:

* **431.** Կոորդինատային ուղղով շարժվող նյութական կետի արագությունը փոխվում է $V(t)$ օրենքով: Գտնել կետի շարժման օրենքը, եթե t_0 պահին այն գտնվում է s_0 կետում.

ա) $V(t)=2t,\ \ t_0=0,\ \ s_0=0$, բ) $V(t)=3t^2,\ \ t_0=0,\ \ s_0=1$,

գ) $V(t)=t^3-t,\ \ t_0=2,\ \ s_0=5$, դ) $V(t)=4t^3+t^2,\ \ t_0=3,\ \ s_0=75$:

Կրկնության համար

Գտնել նշված միջակայքում տրված ֆունկցիայի հակադարձը (432-433).

➢ **432.** ա) $y=x^2+x-7$, $[0;3]$, բ) $y=x^2+x-7$, $[-3;-1]$:

➢ **433.** ա) $y=2^x+2^{-x}$, $[0;1]$, բ) $y=3^x+3^{-x}$, $[-1;0]$:

§6. Երկու ֆունկցիաների քանորդի ածանցման կանոնը

Նախորդ պարագրաֆում սովորեցինք, թե ինչպես պետք է ածանցել երկու ֆունկցիաների գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը: Հետևյալ թեորեմներով տրվում է քանորդի ածանցման կանոնը:

Թեորեմ 1: ***Եթե g ֆունկցիան ածանցելի է x կետում և $g(x)\neq 0$, ապա այդ կետում ածանցելի է նաև $\frac{1}{g}$ ֆունկցիան, ընդ որում***

$$\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}: \qquad (1)$$

Ապացուցում: Դիցուք h_n-ն անվերջ փոքր է: Պարզ ձևափոխություններով ստանում ենք՝

$$\frac{\frac{1}{g(x+h_n)}-\frac{1}{g(x)}}{h_n}=-\frac{1}{g(x)g(x+h_n)}\cdot\frac{g(x+h_n)-g(x)}{h_n}: \qquad (2)$$

Քանի որ g ֆունկցիան ածանցելի և հետևաբար՝ անընդհատ է x կետում, ուստի

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(x+h_n)-g(x)}{h_n}=g'(x), \qquad \lim_{n\to\infty}g(x+h_n)=g(x):$$

Կիրառելով զուգամետ հաջորդականությունների արտադրյալի և քանորդի վերաբերյալ թեորեմները, (2) հավասարությունից ստանում ենք (1) բանաձևը:

Թեորեմ 2: ***Եթե f և g ֆունկցիաներն ածանցելի են x կետում և $g(x)\neq 0$, ապա այդ կետում ածանցելի է նաև $\frac{f}{g}$ ֆունկցիան, ընդ որում***

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}:$$

Ապացուցում: Օգտվելով նախորդ թեորեմից և արտադրյալի ածանցման կանոնից, ստանում ենք՝

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)'=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=$$

$$=\frac{f'(x)}{g(x)}+f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}:$$

Օրինակ: Գտնենք $y=\frac{x^3-3x}{1+4x^5}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Կիրառելով ածանցման կանոնները, ստանում ենք՝

$$\left(\frac{x^3-3x}{1+4x^5}\right)'=\frac{\left(x^3-3x\right)'\cdot\left(1+4x^5\right)-\left(x^3-3x\right)\cdot\left(1+4x^5\right)'}{\left(1+4x^5\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(3x^2-3\right)\left(1+4x^5\right)-\left(x^3-3x\right)\left(20x^4\right)}{\left(1+4x^5\right)^2}=\frac{-8x^7+48x^5+3x^2-3}{\left(1+4x^5\right)^2}:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է $\frac{1}{g(x)}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
2. Ձևակերպեք երկու ֆունկցիաների քանորդի ածանցման կանոնը:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը (434-435).

434. ա) $f(x)=\frac{2x-1}{1-x}$, բ) $f(x)=\frac{2x^2-4}{x+1}$,

գ) $f(x)=\frac{3-4x}{x^2}$, դ) $f(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$:

435. ա) $f(x)=\dfrac{x^4-x}{x^2}$, բ) $f(x)=\dfrac{5-2x^6}{1-x^3}$,

գ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x^3}$, դ) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$:

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը նշված կետում (436-437).

436. $f(x)=\dfrac{3-x}{2+x}$, ա) $x_0=0$, բ) $x_0=-3$:

437. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$, ա) $x_0=-2$, բ) $x_0=1$:

➢**438.** Օգտվելով 1-ին թեորեմից և նախորդ պարագրաֆի (3) բանաձևից՝ ապացուցեք, որ կամայական ամբողջ n-ի համար $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$:

➢**439.** Լուծել $f'(x)<0$ անհավասարումը.

ա) $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^2+1}$, բ) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{1-x}$,

գ) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$, դ) $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2-3x+4}$:

➢**440.** Լուծել $f'(x)>g'(x_0)$ անհավասարումը.

ա) $f(x)=x^3+3x^2+3x+5,\quad g(x)=\dfrac{-24x-24}{x^2+1},\quad x_0=1$,

բ) $f(x)=x^3-6x^2+18x-3,\quad g(x)=\dfrac{9x-3}{x+1},\quad x_0=0$:

***441.** Գտնել a և b թվերն այնպես, որ

ա) $f(4)=\dfrac{4}{3},\ f'(2)=-\dfrac{2}{3}$, որտեղ $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x^2+b}$,

բ) $f(3)=2{,}2;\ f'(2)=-1$, որտեղ $f(x)=\dfrac{x^2+3}{a}+\dfrac{b}{2x-1}$:

* **442.** Գտեք $f(0)$-ն և $g(0)$-ն, եթե

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(0)=1,\quad (fg)'(0)=21,\quad f'(0)=5,\quad g'(0)=3:$$

Կրկնության համար

➢**443.** Տրված է՝ $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ և $g(x)=\cos x$: Գտեք F բարդ ֆունկցիայի բանաձևը և որոշման տիրույթը, եթե.

ա) $F(x)=f(f(x))$, բ) $F(x)=f(g(x))$,

գ) $F(x)=g(g(x))$, դ) $F(x)=g(f(x))$:

444. Տրված է՝ $f(x)=x^2+6x+10$ և $g(x)=\sin x$: Գտեք F բարդ ֆունկցիայի բանաձևը և արժեքների տիրույթը, եթե.

ա) $F(x)=f(f(x))$, բ) $F(x)=f(g(x))$,

գ) $F(x)=g(g(x))$, դ) $F(x)=g(f(x))$:

§7. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը

Հիշենք, որ երկու՝ f և g ֆունկցիաների համադրույթ՝ $f\circ g$, անվանել ենք այն F ֆունկցիան, որի արժեքն x կետում հավասար է f ֆունկցիայի արժեքին $g(x)$ կետում՝ $F(x)=f(g(x))$: Իսկ F ֆունկցիան նման դեպքում կոչել ենք բարդ ֆունկցիա: Հետևյալ թեորեմով տրվում է բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը:

Թեորեմ 1: ***Եթե $t=g(x)$ ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, իսկ $y=f(t)$ ֆունկցիան՝ $t_0=g(x_0)$ կետում, ապա $F=f\circ g$ ֆունկցիան ածանցելի է x_0 կետում, և***

$$F'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0):$$

Այս թեորեմը մենք չենք ապացուցի: Ձևակերպենք և ապացուցենք այն մասնավոր դեպքում, երբ g-ն գծային ֆունկցիա է՝ $g(x)=kx+b$:

Թեորեմ 2: ***Եթե f ֆունկցիան ածանցելի է, ապա $F(x)=f(kx+b)$ ֆունկցիան նույնպես ածանցելի է, և***

$$F'(x)=k\cdot f'(kx+b):$$

Ապացուցում: Դիցուք h_n-ն անվերջ փոքր է: Այդ դեպքում անվերջ փոքր է նաև $k\cdot h_n$ հաջորդականությունը, ուստի

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(kx+kh_n+b)-f(kx+b)}{h_n}=$$

$$=k\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{f(kx+b+kh_n)-f(kx+b)}{kh_n}=k\cdot f'(kx+b):$$

Օրինակ 1: Գտնենք $y=(3x-5)^{100}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Եթե նշանակենք $f(x)=x^{100}$, ապա տրված ֆունկցիան կստանա $y=f(3x-5)$ տեսքը: Այդ դեպքում՝ $f'(x)=100x^{99}$: Հետևաբար,

$$\left((3x-5)^{100}\right)' = 3\cdot f'(3x-5) = 3\cdot 100\cdot(3x-5)^{99} = 300\cdot(3x-5)^{99}:$$

Օրինակ 2: Գտնենք $y = x^n$ ֆունկցիայի ածանցյալը, որտեղ n-ը բացասական ամբողջ թիվ է:

Նշանակենք $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(x) = x^{-n}$: Այդ դեպքում $y = x^n$ ֆունկցիան կներկայացվի $y = f(g(x))$ համադրույթի տեսքով: Հաշվի առնելով, որ $(-n)$-ը բնական թիվ է, և օգտվելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնից, ստանում ենք՝

$$y' = f'(x^{-n})\cdot(x^{-n})' = \left(-\frac{1}{(x^{-n})^2}\right)\cdot(-n)\cdot x^{-n-1} = nx^{n-1}:$$

Այսպիսով, բոլոր ամբողջ n-երի համար ճիշտ է

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (1)$$

բանաձևը (համեմատել 438-րդ առաջադրանքի հետ):

Կարելի է ապացուցել, որ (1) բանաձևը ճիշտ է կամայական ցուցիչի դեպքում.

Կամայական α թվի համար

$$(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}:$$

Այս բանաձևը մենք չենք ապացուցի: Նշենք միայն, որ α-ի ամբողջ արժեքներից բացի, մենք այն ապացուցել ենք նաև $\alpha = \frac{1}{2}$ դեպքում:

Օրինակ 3: Գտնենք $y = \frac{1}{\sqrt{x^4+x+1}}$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Նշանակելով $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$, ստանում ենք՝ $y = f(x^4+x+1)$: Քանի որ $f'(t) = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$, հետևաբար՝

$$y' = f'(x^4+x+1)\cdot(x^4+x+1)' =$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot(x^4+x+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(4x^3+1) = -\frac{4x^3+1}{2\sqrt{(x^4+x+1)^3}}:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ձևակերպեք բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը:
2. Ապացուցեք $f(kx+b)$ տեսքի բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը:
3. Գրեք x^α աստիճանային ֆունկցիայի ածանցյալը:

Առաջադրանքներ

Տրված f ֆունկցիան ներկայացնել երկու ֆունկցիաների համադրույթի տեսքով (445-452).

445. ա) $f(x)=\sin\frac{x}{3}$, բ) $f(x)=e^{4x-1}$:

446. ա) $f(x)=(3x-2)^{15}$, բ) $f(x)=\cos^3 x$:

447. ա) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, բ) $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$:

448. ա) $f(x)=\sin^2 x+5\sin x$, բ) $f(x)=\sin(x^2+5x)$:

449. ա) $f(x)=e^{\sin x}$, բ) $f(x)=\sin e^x$:

450. ա) $f(x)=\log_3(x-5x^3)$, բ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x^7-4x^2}}$:

451. ա) $f(x)=\log_2(x^2-3x)$, բ) $f(x)=\log_2^2 x-3\log_2 x$,

452. ա) $f(x)=\sqrt{\cos x}$, բ) $f(x)=\cos\sqrt{x}$:

Գտնել f ֆունկցիայի ածանցյալը (453-456).

453. ա) $f(x)=x^3+4\cdot x^{3,5}$, բ) $f(x)=x^{\frac{5}{4}}-3\cdot x^{-\frac{1}{3}}$,

գ) $f(x)=x^{\pi}+\pi x$, դ) $f(x)=6\cdot x^{-\frac{2}{3}}-x^{0,1}$:

454. ա) $f(x)=12\cdot\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}$, բ) $f(x)=\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[6]{x^2}$,

գ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, դ) $f(x)=\frac{6}{\sqrt[5]{x}}+\frac{5}{\sqrt[6]{x}}$:

455. ա) $f(x)=(4x-2)^{12}$, բ) $f(x)=(3-2x)^{15}$,

գ) $f(x)=(2-x)^{-9}$, դ) $f(x)=(x+1)^{-12}$,

ե) $f(x)=\frac{4}{(5x-1)^{10}}$, զ) $f(x)=\frac{1}{(1-2x)^{18}}$:

➢**456.** ա) $f(x)=\sqrt{3x^4-x}$, բ) $f(x)=\sqrt{3x-x^5}$,

գ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x^2-3x}}$, դ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x^3+4}}$:

Գտնել $f'(x_0)$-ն (457-458).

➢**457.** $f(x)=(x^3-4x^2+4x)^{17}$, ա) $x_0=1$, բ) $x_0=0$:

➢**458.** $f(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{2}{x^2+1}$, ա) $x_0=0$, բ) $x_0=-\sqrt{3}$:

➢**459.** Լուծել $f'(x) \geq g'(x)$ անհավասարումը.

ա) $f(x)=2\sqrt{3+x}+x, \quad g(x)=x$,

բ) $f(x)=-2(2-x)^{\frac{3}{2}}, \quad g(x)=3x^2+1$:

***460.** $f^2(x)$ և $\dfrac{1}{f(x)}$ ֆունկցիաների ածանցյալները $x=1$ կետում, համապատասխանաբար, 2 և 27 են: Գտնել $f'(1)$-ը:

➢**461.** Գտեք $f(3)$ -ը, եթե՝

ա) $(f^2)'(3)=42, \quad f'(3)=7$, բ) $(f^2)'(3)=20, \quad f'(3)=5$:

***462.** $\sqrt{f(x)}$ և $\dfrac{1}{f(x)}$ ֆունկցիաների ածանցյալները $x=0$ կետում, համապատասխանաբար, 4 և -1 են: Գտնել $f(0)$-ն:

Կրկնության համար

➢**463.** A և B քաղաքներից միաժամանակ միմյանց հանդեպ դուրս եկան երկու հետիոտն: Առաջինը B հասավ հանդիպումից 4,5 ժ հետո, իսկ երկրորդը A հասավ հանդիպումից 2 ժ հետո: Գտնել հետիոտների արագությունները, եթե A և B քաղաքների միջև հեռավորությունը 30 կմ է:

➢**464.** M և N բնակավայրերից, որոնց միջև հեռավորությունը 50 կմ է, միաժամանակ միմյանց ընդառաջ շարժվեցին երկու մոտոցիկլավար և հանդիպեցին 30 ր հետո: Գտնել յուրաքանչյուր մոտոցիկլավարի արագությունը, եթե հայտնի է, որ նրանցից մեկը M հասավ 25 ր շուտ, քան մյուսը՝ N:

§8. Տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները

Արդեն գիտենք աստիճանային ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը՝

$$(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}: \qquad (1)$$

Այս պարագրաֆում կներկայացնենք մնացած տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերը: Առանց ապացույցի ընդունենք, որ

$$(\sin x)'=\cos x: \qquad (2)$$

Կիրառելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը՝ (2) բանաձևից ստանում ենք՝

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x:$$

Այսպիսով՝

$$(\cos x)' = -\sin x : \qquad (3)$$

Կիրառելով քանորդի ածանցման կանոնը՝ (2), (3) բանաձևերից ստանում ենք՝

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} :$$

Այսպիսով՝

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} : \qquad (4)$$

Հանգունորեն կարող ենք ստանալ $\mathrm{ctg}\, x$ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը՝

$$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} : \qquad (5)$$

Օրինակ 1: Գտնենք $y = 2\,\mathrm{tg}\, x + \sin 2x$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos 2x :$$

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը π կետում: Նախ գտնենք f'-ը.

$$f'(x) = \frac{(\cos 3x)' \cdot x - \cos 3x \cdot x'}{x^2} = \frac{-3x \sin 3x - \cos 3x}{x^2} :$$

Տեղադրելով $x = \pi$, ստանում ենք՝ $f'(\pi) = \pi^{-2}$:

Առանց ապացույցի ընդունելով, որ

$$(e^x)' = e^x , \qquad (6)$$

ստանանք $y = a^x$ ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալը: Օգտվելով (6) բանաձևից և կիրառելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը՝ ստանում ենք՝

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a :$$

Այսպիսով՝

$$(a^x)' = a^x \ln a : \qquad (7)$$

$y=\ln x$ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը ստանալու համար դրական x-երի համար ածանցենք $x=e^{\ln x}$ նույնության երկու մասերը: Ստանում ենք՝ $1=e^{\ln x}(\ln x)'$, որտեղից՝

$$\boldsymbol{(\ln x)'=\frac{1}{x}}\text{ :} \qquad (8)$$

Այս բանաձևի օգնությամբ հեշտությամբ կարող ենք ստանալ կամայական հիմքով լոգարիթմական ֆունկցիայի ածանցման կանոնը՝

$$(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{x\ln a}\text{ :}$$

Այսպիսով՝

$$\boldsymbol{(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}}\text{ :} \qquad (9)$$

Օրինակ 3: Գտնենք $y=e^{\sqrt{x}}\cos 3x$ ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$y'=\left(e^{\sqrt{x}}\right)'\cdot\cos 3x+e^{\sqrt{x}}\cdot(\cos 3x)'=$$
$$=e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\cos 3x-3\sin 3x\cdot e^{\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\cos 3x}{2\sqrt{x}}-3\sin 3x\right)\text{:}$$

Օրինակ 4: Գտնենք $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը e կետում:
Նախ ածանցենք ֆունկցիան՝

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}\text{ :}$$

Հետևաբար՝ $f'(e)=0$:

Տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերի ցուցակի լրիվության համար առանց ապացույցի բերենք նաև հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերը:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (10)$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2},\qquad (\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}\text{ :} \qquad (11)$$

Երկու ֆունկցիաների գումարի, արտադրյալի, քանորդի և համադրույթի ածանցյալների հաշվման կանոնների և (1)-(11) բանաձևերի օգնությամբ կարելի է հաշվել կամայական տարրական ֆունկցիայի ածանցյալը, որը, ինչպես երևում է այդ բանաձևերից, դարձյալ կլինի տարրական ֆունկցիա:

Հիշեցնենք, որ կամայական տարրական ֆունկցիա իր որոշման տիրույթի յուրաքանչյուր կետում անընդհատ է: Սակայն ոչ բոլոր տարրական ֆունկցիաներն են, որ իրենց որոշման տիրույթի բոլոր կետերում ունեն ածանցյալ:

Օրինակ 5: Համոզվենք, որ $f(x)=|x|$ ֆունկցիան $x_0=0$ կետում ածանցյալ չունի:

Ինչպես գիտենք, $h_n=\frac{(-1)^n}{n}$, $n\in\mathbf{N}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է: Հեշտ է ստուգել, որ

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\frac{|h_n|}{h_n}=(-1)^n:$$

Քանի որ $(-1)^n$ հաջորդականությունը տարամետ է, ուրեմն $|x|$ ֆունկցիան 0 կետում ածանցյալ չունի:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչի՞ է հավասար $y=\sin x$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
2. Արտածեք $y=\cos x$ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
3. Արտածեք $y=\operatorname{tg} x$ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
4. Արտածեք $y=\operatorname{ctg} x$ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
5. Ինչի՞ է հավասար $y=e^x$ ֆունկցիայի ածանցյալը:
6. Արտածեք ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
7. Արտածեք բնական հիմքով լոգարիթմական ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:
8. Արտածեք լոգարիթմական ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևը:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը (465-471).

465. ա) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}+2x$, բ) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$,

գ) $f(x)=\frac{\sqrt{x}+x^2}{\sqrt{x}-1}$, դ) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$:

466. ա) $f(x)=\sin x+e^x$, բ) $f(x)=\cos x+\log_7 x$,

գ) $f(x)=5^x+\operatorname{tg} x$, դ) $f(x)=\ln x+\operatorname{ctg} x$,

ե) $f(x)=x^{4,1}+\cos x$, զ) $f(x)=\cos x-e^x+\pi\cdot e$:

467. ա) $f(x)=\sin 4x$, բ) $f(x)=\cos \pi x$,

գ) $f(x)=\operatorname{tg} x+8\pi$, դ) $f(x)=5\operatorname{ctg} x$:

468. ա) $f(x)=2\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$, բ) $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{8}-2x\right)$,

գ) $f(x)=4\operatorname{tg}(3x-1)$, դ) $f(x)=-6\operatorname{ctg}(4-5x)$:

469. ա) $y=e^{2x}+x-1$, բ) $y=2^{-x}+2e$,

գ) $y=\ln(3x+1)-\lg 2$, դ) $y=\log_5(2-x)-x$:

470. ա) $y=\sin\frac{x}{4}+x\ln x$, բ) $y=\operatorname{tg}2x+e^{5x}$,

գ) $y=\cos(2x+3)-\log_3 2x$, դ) $y=\operatorname{ctg}(5-x)+4^{-x}$:

471. ա) $f(x)=x\ln x-x$, բ) $f(x)=\log_2(x+1)$,

գ) $f(x)=3^x\ln x+\ln 3$, դ) $f(x)=\ln(e^x+1)$:

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում (472-474).

➢**472.** ա) $f(x)=\left(\frac{20}{\pi}x-3\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$, $x_0=\frac{2}{5}\pi$,

բ) $f(x)=\left(\frac{54}{\pi}x-5\right)\cos\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)$, $x_0=-\frac{\pi}{18}$,

գ) $f(x)=\left(\frac{9}{\pi}x+4\right)\operatorname{tg}\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$, $x_0=\frac{\pi}{3}$,

դ) $f(x)=4\cos^2 x-\frac{2x-\pi}{2x-\pi-1}$, $x_0=\frac{\pi}{2}$,

ե) $f(x)=2\sin^2 x-\frac{4x-\pi}{4x-\pi+4}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$:

➢**473.** ա) $f(x)=2\sin 7x\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$, բ) $f(x)=16\sin\frac{x}{4}\cos x$, $x_0=-\pi$:

➢**474.** ա) $f(x)=e^{2x+3}+2\frac{x+e}{x}-x$, $x_0=-1$,

բ) $f(x)=e^{3x-5}+12\frac{x+e}{x}+x$, $x_0=2$,

գ) $f(x)=\frac{5^{4x}-10\cdot 5^{2x}}{\ln 5}$, $x_0=1$:

* **475.** Օգտվելով 364, գ) առաջադրանքից՝ ապացուցեք, որ $(\sin x)'=\cos x$:

➢**476.** Լուծել $f(x)\cdot f'(x)=-1$ հավասարումը, եթե $f(x)=\sin x-\cos x$:

* **477.** Լուծել $f(x)\cdot f'(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ հավասարումը, եթե $f(x)=\frac{\cos 2x+\sin 2x}{\sqrt{2}}$:

➢**478.** Լուծել $f'(x)=g'(x)$ հավասարումը.

ա) $f(x)=2\ln^3 x$, $g(x)=12\ln x-3\ln^2 x$;

բ) $f(x)=2^{x+1}-2^{1-x}$, $g(x)=5x\cdot\ln 2+\ln 7$:

479. Լուծել անհավասարումը.

ա) $f'(x) - g'(x) < f(1) - f'(1)$, որտեղ $f(x) = (3+x)^{1,5}$, $g(x) = (10-x)^{1,5}$,

բ) $e^{2f(x)} - 5x^2 f'(2) < \frac{3}{2} g'\left(\frac{\pi}{12}\right)$, որտեղ $f(x) = \ln(x^2+1)$, $g(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos 2x}$:

Կրկնության համար

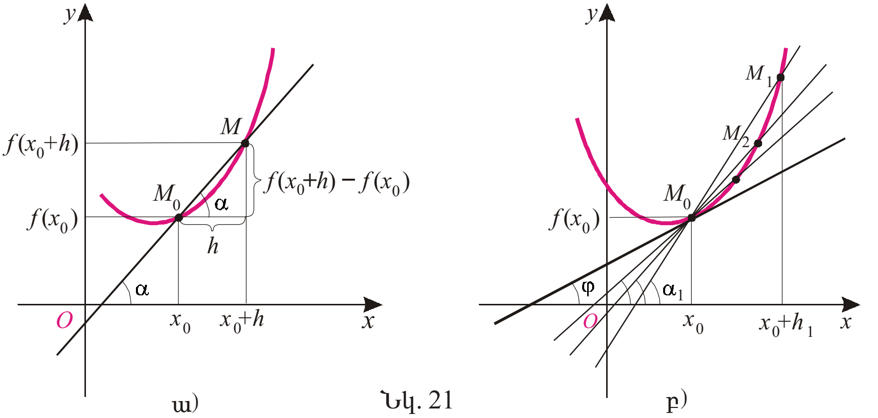
* **480.** Իրարից տարբեր a, b, c թվերը երկրաչափական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ են, իսկ $\frac{1}{a+1}$, $\frac{1}{b+1}$, $\frac{1}{c+1}$ թվերը կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա: Գտնել թվաբանական պրոգրեսիայի գումարը:

* **481.** Ապացուցեք, որ եթե $xz^2 + x^2z + 2y^2 = 2xyz + y^2x + y^2z$, ապա x, y, z թվերը կամ թվաբանական պրոգրեսիա են կազմում, կամ՝ երկրաչափական:

§9. Ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող

Դիտարկենք $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 21, ա): Այդ գրաֆիկի կամայական երկու կետով անցնող ուղիղն անվանում են ***f ֆունկցիայի գրաֆիկի հատող***:

Այսուհետև տրված ուղղի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյուն ասելով՝ կհասկանանք այն փոքրագույն ոչ բացասական α անկյունը, որով պետք է O կետի շուրջը պտտել աբսցիսների առանցքը, որպեսզի այն զուգահեռ դառնա կամ համընկնի տրված ուղղի հետ (նկ. 21, ա):



Նկ. 21

Հեշտ է տեսնել, որ $M_0(x_0, f(x_0))$ և $M(x_0+h, f(x_0+h))$ կետերով անցնող հատողի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյան տանգենսը հավասար է x_0 կետում ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերությանը (նկ. 21, ա).

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}:$$

Եթե կամայական h_n անվերջ փոքրի դեպքում $M_0(x_0, f(x_0))$ և $M_n(x_0+h_n, f(x_0+h_n))$ կետերով անցնող հատողները n-ն անվերջի ձգտելիս մոտենում են մի սահմանային դիրքի (նկ.21, բ), ***ապա այդ սահմանային ուղիղն անվանում են $(x_0, f(x_0))$ կետում $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող:***

Եթե M_oM_n հատողները աբսցիսների առանցքի հետ կազմում են α_n անկյուն, իսկ շոշափողը՝ φ (նկ. 21, բ), ապա n-ը անվերջի ձգտելիս $\alpha_n \to \varphi$: Հետևաբար, $\operatorname{tg}\alpha_n \to \operatorname{tg}\varphi$, որտեղից ստանում ենք.

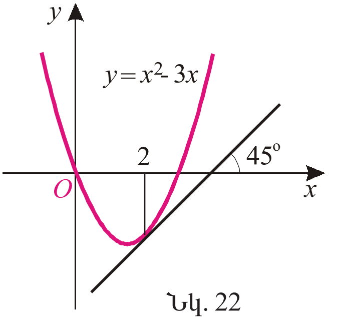
$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{n\to\infty}(\operatorname{tg}\alpha_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n) - f(x_0)}{h_n} = f'(x_0):$$

Ստացվեց, որ ածանցյալն ունի հետևյալ ***երկրաչափական իմաստը***.

$y = f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում հավասար է $(x_0, f(x_0))$ կետում ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի և աբսցիսների առանցքի կազմած φ անկյան տանգենսին.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi: \tag{3}$$

Նշենք, որ (3) բանաձևը ճիշտ է այն դեպքում, երբ շոշափողը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին, այսինքն՝ $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$: Հակառակ դեպքում $\operatorname{tg}\varphi$-ն որոշված չէ, իսկ f ֆունկցիան ածանցելի չէ x_0 կետում:



Նկ. 22

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x) = x^2 - 3x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետի աբսցիսը, որում տարված շոշափողը աբսցիսների առանցքի հետ կազմում է 45° անկյուն:

Համաձայն (3) բանաձևի, մենք պետք է գտնենք այն x կետը, որի համար $f'(x) = \operatorname{tg}45^\circ$: Քանի որ $f'(x) = 2x - 3$, իսկ $\operatorname{tg}45^\circ = 1$, ուրեմն (նկ. 22).

$$2x - 3 = 1 \Rightarrow x = 2:$$

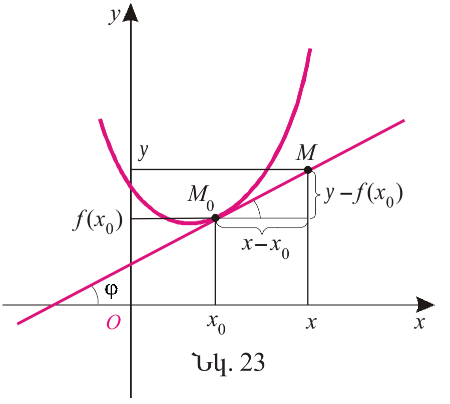
Պատասխան՝ 2:

Այժմ գտնենք $(x_0, f(x_0))$ կետում $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի հավասարումը, երբ շոշափողը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին (նկ.23)։ Ինչպես երևում է գծագրից, $M(x, y)$ կետը պատկանում է շոշափողին, եթե

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0):$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$։ Այսպիսով՝



Նկ. 23

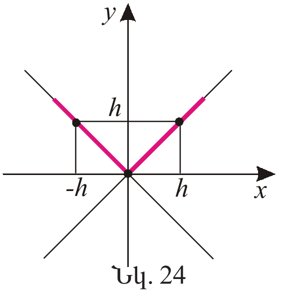
$(x_0, f(x_0))$ *կետում* $y = f(x)$ *ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի հավասարումն է՝*

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0):$$

Այս հավասարումը հաճախ գրում են նաև հետևյալ տեսքով.

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \text{ որտեղ } y_0 = f(x_0):$$

Արդեն գիտենք, որ $f(x) = |x|$ ֆունկցիան $x_0 = 0$ կետում ածանցելի չէ։ Այժմ այդ փաստը մեկնաբանենք երկրաչափորեն։ Նկատենք, որ եթե $f(x) = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հատող կառուցենք $(0; 0)$ և $(h; |h|)$ կետերով (նկ. 24), ապա դրական h-երի դեպքում կստացվի $y = x$ ուղիղը, իսկ բացասական h-երի դեպքում՝ $y = -x$ ուղիղը։ Ուստի այդ հատողները մի որոշակի սահմանային դիրք ունենալ չեն կարող։ Այսինքն՝ $f(x) = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $(0; 0)$ կետում շոշափող չունի։



Նկ. 24

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x) = x^2e^x + 2x$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա $x_0 = -2$ աբսցիս ունեցող կետում տարված շոշափողի հավասարումը։

Նախ՝ $f(x_0) = f(-2) = 4e^{-2} - 4$ և

$$f'(x) = (x^2)'e^x + x^2e^x + 2 = e^x(2x + x^2) + 2:$$

Հետևաբար, $f'(x_0) = f'(-2) = 2$, և որոնելի շոշափողի հավասարումն է՝ $y = 2(x+2) + 4e^{-2} - 4$, կամ, որ նույնն է, $y = 2x + 4e^{-2}$:

Պատասխան՝ $y = 2x + 4e^{-2}$:

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ $f(x) = x\cos x + 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա $x_0 = 0$ աբսցիսն ունեցող կետում տարված շոշափողը զուգահեռ է $y = x - 3$ ուղղին։

Հաշվենք ֆունկցիայի և նրա ածանցյալի արժեքները $x_0 = 0$ կետում.

$$f(0) = 2, \quad f'(x) = \cos x - x\sin x, \quad f'(0) = 1:$$

Նշված շոշափողի հավասարումը կլինի՝ $y = x + 2$: Քանի որ այդ շոշափողը և $y = x - 3$ ուղիղն ունեն միևնույն անկյունային գործակիցը, իսկ ազատ անդամները տարբեր են, ուրեմն նրանք զուգահեռ են:

Օրինակ 4: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 5$ ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա գտնենք այն կետերը, որոնցում տարված շոշափողները զուգահեռ են աբսցիսների առանցքին:

Քանի որ աբսցիսների առանցքին զուգահեռ ուղղի անկյունային գործակիցը 0 է, անհրաժեշտ է, որ որոնելի կետերի աբսցիսներում ֆունկցիայի ածանցյալը լինի 0: Ընդ որում, այդ կետերի օրդինատները պետք է լինեն 0-ից տարբեր, հակառակ դեպքում՝ շոշափողը կհամընկնի աբսցիսների առանցքի հետ:

Ֆունկցիայի ածանցյալն է՝ $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$: Լուծելով $f'(x) = 0$ հավասարումը, գտնում ենք՝ $x_1 = -2$ և $x_2 = 4$: Այդ կետերում հաշվելով ֆունկցիայի արժեքները, ստանում ենք՝ $f(-2) = 33$ և $f(4) = -75$:

Պատասխան՝ $(-2; 33)$ և $(4; -75)$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ուղիղն են անվանում $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հատող:
2. Ո՞րն է ուղղի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյունը:
3. Ո՞ր ուղիղն են անվանում $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափող:
4. Ո՞րն է ածանցյալի երկրաչափական իմաստը:
5. Ինչի՞ է հավասար $(x_0, f(x_0))$ կետում $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի անկյունային գործակիցը, եթե շոշափողը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին:
6. Գրեք $(x_0, f(x_0))$ կետում $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի հավասարումը:

Առաջադրանքներ

482. Գտնել f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետում տարված շոշափողի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյունը.

ա) $f(x) = \dfrac{x^2}{6}$, $x_0 = \sqrt{3}$,   բ) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = 0$,

գ) $f(x) = \sin x + x$, $x_0 = 2{,}5\pi$,   դ) $f(x) = x^3 - 2x^2 - \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$,

ե) $f(x) = \ln 3x + x$, $x_0 = 2$,   զ) $f(x) = e^x\left(x^2 + 1\right)$, $x_0 = 0$:

483. Գտնել f ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետերի աբսցիսները, որոնցում գրաֆիկին տարած շոշափողը աբսցիսների առանցքի հետ կազմում է φ անկյուն.

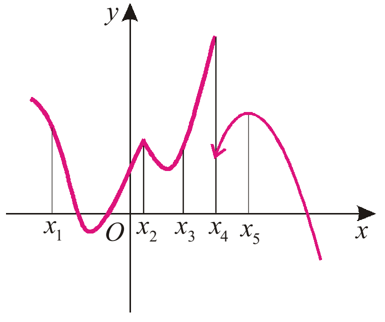
ա) $f(x)=x^3+3x^2-23x+\ln 5, \quad \varphi=45^\circ$,

բ) $f(x)=\sin x\cdot\cos x-2x+11, \quad \varphi=135^\circ$,

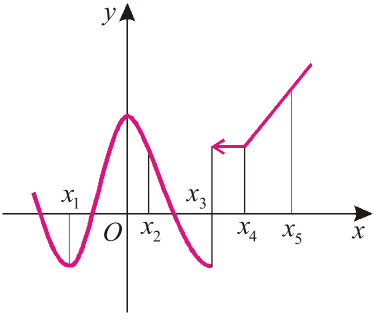
գ) $f(x)=\sin 2x, \quad \varphi=60^\circ$,

դ) $f(x)=\sin^2 x+x, \quad \varphi=45^\circ$:

484. 25-րդ նկարում գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիաների համար պարզել, թե նշված x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 կետերից որում՝



Նկ. 25



1) ֆունկցիան անընդհատ չէ,

2) ֆունկցիան ածանցյալ չունի,

3) ֆունկցիայի ածանցյալը զրո է,

4) ֆունկցիայի ածանցյալը դրական է,

5) ֆունկցիայի ածանցյալը բացասական է:

Գտնել f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետում տարված շոշափողի հավասարումը (485-487).

485. ա) $f(x)=2x-x^2, \quad x_0=2$, բ) $f(x)=x^3-1, \quad x_0=-1$,

գ) $f(x)=\dfrac{2}{1+x^2}, \quad x_0=1$, դ) $f(x)=2x-\dfrac{1}{x}, \quad x_0=-1$,

ե) $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}, \quad x_0=0$, զ) $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x^3}, \quad x_0=1$:

486. ա) $f(x)=\mathrm{tg}\, x, \quad x_0=\dfrac{\pi}{3}$, բ) $f(x)=3\sin x+1, \quad x_0=\dfrac{\pi}{2}$,

գ) $f(x)=2\cos 2x+4, \quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$, դ) $f(x)=\mathrm{ctg}\, 2x, \quad x_0=\dfrac{\pi}{8}$:

487. ա) $f(x)=x^2e^x, \quad x_0=1$, բ) $f(x)=e^{-x}, \quad x_0=-1$,

գ) $f(x)=\ln 2x, \quad x_0=1{,}5$, դ) $f(x)=\ln x^2, \quad x_0=e$:

488. Գտնել f ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետերի աբսցիսները, որոնցում տարված շոշափողը զուգահեռ է նշված ուղղին.

ա) $f(x)=x^3+6x+2$, $y=6x$, բ) $f(x)=3x^4-2x$, $y=2(1-x)$,

գ) $f(x)=\sin^2 x+x$, $y=x+9$, դ) $f(x)=e^{2x+1}+x$, $y=3x+e$:

➢**489.** Գտնել f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետում տարված շոշափողի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերը.

ա) $f(x)=3x-2x^2$, $x_0=1$, բ) $f(x)=\sin 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{8}$,

գ) $f(x)=e^{2x+2}+x$, $x_0=-1$, դ) $f(x)=\log_7 x$, $x_0=7$,

ե) $f(x)=\cos 4x$, $x_0=\pi$, զ) $f(x)=x^4+x^{-4}$, $x_0=-1$:

➢**490.** Գտնել f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետում տարված շոշափողով և կոորդինատային առանցքներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

ա) $f(x)=x^2+4x-5$, $x_0=-1$, բ) $f(x)=x^2-6x-10$, $x_0=2$,

գ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=2$, դ) $f(x)=e^x$, $x_0=0$:

* **491.** Գտնել a պարամետրը, եթե հայտնի է, որ f ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_1 և x_2 աբսցիս ունեցող կետերում տարված շոշափողները զուգահեռ են.

ա) $f(x)=(x^2-1)(x+a)$, $x_1=-2$, $x_2=3$,

բ) $f(x)=3x^2-\dfrac{a}{x-1}$, $x_1=2$, $x_2=3$:

Կրկնության համար

492. Գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը.

ա) $f(x)=2x^2-4x+7$, բ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+8x+20}$,

➢գ) $f(x)=\log_{0,5}(x^2+x+2)$, * դ) $f(x)=2^x+2^{-x}$:

➢**493.** Ապացուցել, որ տրված ֆունկցիան նշված միջակայքում մոնոտոն է և նշել մոնոտոնության բնույթը.

ա) $f(x)=x^3-5x^2+4x-7$, $[4;+\infty)$,

բ) $f(x)=(1-x)\lg x+e^{-x}$, $(1;+\infty)$,

գ) $f(x)=\sin^2 x-3\sin x+4$, $[-1;1]$,

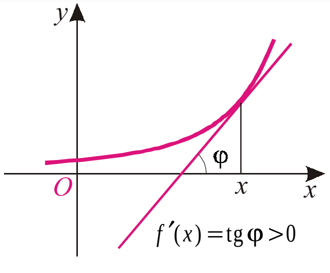
դ) $f(x)=\mathrm{tg}(x^2+2x)$, $[-1;0]$:

§10. Ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը և ածանցյալը: Կրիտիկական կետեր

Մենք տեսանք, որ ածանցյալն ունի ֆիզիկական իմաստ. եթե կոորդինատային առանցքով շարժվող նյութական կետը ժամանակի t պահին գտնվում է $s(t)$ կետում, ապա t պահին նրա արագությունը $s'(t)$ է: Պարզ է, որ եթե կետի արագությունը դրական է, ապա կետը շարժվում է դեպի աջ, և $s(t)$-ն աճող է, իսկ եթե կետի արագությունը բացասական է, ապա կետը շարժվում է դեպի ձախ, և $s(t)$-ն նվազող է: Այս պնդումն ունի խիստ մաթեմատիկական ձևակերպում և ապացույց: Այստեղ այն կբերենք առանց ապացույցի:

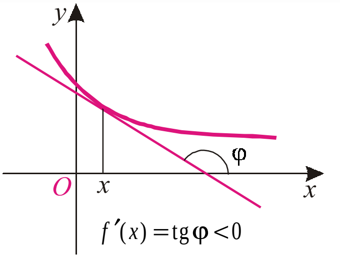
Թեորեմ 1 (ֆունկցիայի աճման բավարար պայման)**:** ***Եթե միջակայքի բոլոր կետերում $f'(x)>0$, ապա այդ միջակայքում f ֆունկցիան աճող է*** (նկ. 26, ա)**:**

Թեորեմ 2 (ֆունկցիայի նվազման բավարար պայման)**:** ***Եթե միջակայքի բոլոր կետերում $f'(x)<0$, ապա այդ միջակայքում f ֆունկցիան նվազող է*** (նկ. 26, բ)**:**



ա)

Նկ. 26



բ)

Այսպիսով, ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը կարելի է գտնել հետևյալ հաշվեկանոնով.

1. ***գտնել $f'(x)$-ը և նշել $D(f)$-ի այն կետերը, որտեղ ածանցյալը գոյություն չունի,***

2. ***գտնել $f'(x)=0$ հավասարման արմատները,***

3. ***նախորդ երկու քայլերում գտնված կետերի միջոցով ֆունկցիայի որոշման տիրույթը տրոհել միջակայքերի,***

4. ***այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում որոշել ածանցյալի նշանը:***

Այն միջակայքում, որտեղ $f'(x)>0$, ֆունկցիան աճող է, իսկ այն միջակայքում, որտեղ $f'(x)<0$, ֆունկցիան նվազող է:

Նշենք, որ այս հաշվեկանոնից չենք կարող օգտվել, եթե ֆունկցիան «վատն» է: Օրինակ, ֆունկցիան կարող է ոչ մի կետում ածանցյալ չունենալ, և չենք կարող կատարել հաշվեկանոնի երրորդ քայլը: Սակայն տարրական ֆունկցիաների մոնոտոնության միջակայքերը կարելի է գտնել բերված հաշվեկանոնով:

Նկատենք, որ եթե f ֆունկցիան $(a;b)$-ում աճող է, իսկ a կետում՝ անընդհատ, ապա այն կլինի աճող նաև $[a;b)$-ում: Հիշենք նաև, որ տարրական ֆունկցիաներն անընդհատ են իրենց որոշման տիրույթի կամայական կետում: Հետևաբար, եթե տարրական ֆունկցիայի ածանցյալի նշանապահպանման միջակայքի ծայրակետը պատկանում է ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, ապա այդ ծայրակետը նույնպես կպատկանի մոնոտոնության միջակայքին:

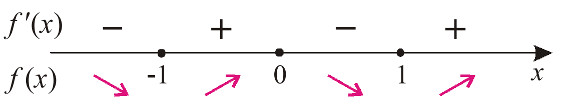
Ինչպես տեսանք, ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը գտնելիս կարևոր դեր են խաղում հաշվեկանոնի առաջին երկու քայլերում գտնված կետերը, այսինքն՝ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի այն կետերը, որոնցում ածանցյալը կա՛մ գոյություն չունի, կա՛մ հավասար է 0-ի: Այդպիսի կետերն ունեն հատուկ անվանում:

Ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ներքին կետը կանվանենք կրիտիկական կետ, եթե այդ կետում ֆունկցիայի ածանցյալը զրո է կամ գոյություն չունի:

Այժմ վերը բերված հաշվեկանոնի առաջին երկու կետերը կարող ենք փոխարինել մեկով՝ ***գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը:***

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=x^4-2x^2$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը: Օգտվենք վերը բերված հաշվեկանոնից.

1. $f'(x)=4x^3-4x$, $x\in \mathrm{R}$,
2. $4x^3-4x=0$ հավասարման արմատներն են $-1; 0$ և 1 թվերը,
3. $(-1;0)$ և $(1;+\infty)$ միջակայքերում $f'(x)=4x^3-4x>0$, իսկ $(-\infty;-1)$ և $(0;1)$ միջակայքերում՝ $4x^3-4x<0$:



Նկ. 27

Հետևաբար, ֆունկցիան աճող է $(-1;0)$ և $(1;+\infty)$ միջակայքերում, նվազող՝ $(-\infty;-1)$ և $(0;1)$ միջակայքերում: 27-րդ նկարում բերված է թվային առանցքը՝ տրոհված $-1; 0$ և 1 կետերով: Առանցքից վեր նշված են համապատասխան միջակայքերում ֆունկցիայի ածանցյալի նշանները, իսկ առանցքից ցած՝ ֆունկցիայի մոնոտոնության բնույթը՝ ↗ - աճող, ↘ - նվազող:

Հաշվի առնելով, որ $-1; 0; 1$ կետերը պատկանում են ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, ստանում ենք պատասխանը.

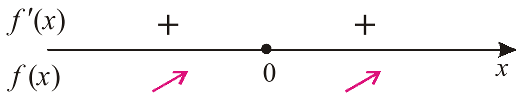
ֆունկցիան աճող է $[-1;0]$ և $[1;+\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում,

ֆունկցիան նվազող է $(-\infty;-1]$ և $[0;1]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում:

Ուշադրություն դարձնենք, որ ֆունկցիան աճող է $[-1;0]$ և $[1;+\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում առանձին, ոչ թե նրանց միավորման վրա: Իրոք, $-0{,}5<1$, սակայն $f(-0{,}5)=-0{,}4375>-1=f(1)$:

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x)=x^5+2x^3-1$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:

Ֆունկցիայի ածանցյալն է՝ $f'(x)=5x^4+6x^2$, $x\in R$: Հետևաբար, $f'(0)=0$, իսկ $(-\infty;0)$ և $(0;+\infty)$ միջակայքերում $f'(x)>0$ (նկ. 28):



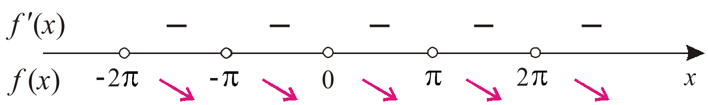
Նկ. 28

Հաշվի առնելով, որ $0\in D(f)$, ստանում ենք, որ f-ն աճող է $(-\infty;0]$ և $[0;+\infty)$ միջակայքերում: Քանի որ այդ միջակայքերն ունեն ընդհանուր կետ, ֆունկցիան աճող է նաև նրանց միավորման վրա:

Պատասխան՝ ֆունկցիան աճող է $(-\infty;\infty)$-ում:

Օրինակ 3: Գտնենք $f(x)=\mathrm{ctg}x$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:

Ֆունկցիան որոշված է, երբ $x\neq\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, և $f'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x\in D(f)$: Ուստի ֆունկցիայի որոշման տիրույթին պատկանող կամայական x կետում՝ $f'(x)<0$ (նկ. 29):



Նկ. 29

Պատասխան՝ ֆունկցիան նվազող է $(\pi k;\pi(k+1))$, $k\in\mathbf{Z}$, միջակայքերից յուրաքանչյուրում:

Օրինակ 4: Գտնենք $f(x)=(x^2-24)e^x$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:

Ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա: Ածանցելով՝ ստանում ենք.

$$f'(x)=e^x(x^2+2x-24),\quad x\in\mathbf{R}:$$

Քանի որ կամայական x-ի համար $e^x > 0$, ուրեմն $f'(x)$-ի նշանը համընկնում է $x^2+2x-24$ եռանդամի նշանի հետ: Լուծելով $x^2+2x-24=0$ հավասարումը` ստանում ենք $x_1=-4$ և $x_2=6$ արմատները: Եռանդամը դրական է $(-\infty;-4)$ և $(6;+\infty)$ միջակայքերում, բացասական` $(-4;6)$ միջակայքում:

Պատասխան` ֆունկցիան աճող է $(-\infty;-4]$ և $[6;+\infty)$ միջակայքերում, նվազող` $[-4;6]$ միջակայքում:

Օրինակ 5: Գտնենք $f(x)=|x|$ ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը և մոնոտոնության միջակայքերը:

Ինչպես գիտենք, $f(x)=|x|$ ֆունկցիան 0 կետում ածանցյալ չունի: Մյուս կողմից,

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ երբ } x>0 \\ -x, \text{ երբ } x<0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 1, \text{ երբ } x>0 \\ -1, \text{ երբ } x<0 \end{cases}:$$

Հետևաբար, ֆունկցիայի միակ կրիտիկական կետը 0-ն է, ֆունկցիան նվազող է $(-\infty;0]$ միջակայքում և աճող` $[0;+\infty)$-ում:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր կետերն են անվանում կրիտիկական:
2. Ո՞րն է միջակայքում ֆունկցիայի աճման բավարար պայմանը:
3. Ո՞րն է միջակայքում ֆունկցիայի նվազման բավարար պայմանը:
4. Ինչպե՞ս են գտնում ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:
5. Մոնոտո՞ն է արդյոք $\operatorname{ctg} x$ ֆունկցիան` ա) $(\pi k; \pi(k+1))$, $k\in \mathbf{Z}$, միջակայքերից յուրաքանչյուրում, բ) իր որոշման տիրույթում:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը (494-496).

494. ա) $f(x)=2x^2-3x+1$, բ) $f(x)=2+3x-x^2$,

գ) $f(x)=3x^4-4x^3+5$, դ) $f(x)=x^4-4x^3+2$,

ե) $f(x)=\dfrac{2x^3}{1-3x^2}$, զ) $f(x)=\dfrac{3x-4}{1+x^2}$:

495. ա) $f(x)=4\sin x-17$, բ) $f(x)=1+2\cos x$,

գ) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$, դ) $f(x)=\sin^2 x$,

ե) $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$, զ) $f(x)=3x^2-2x\cos x+2\sin x$:

➢**496.** ա) $f(x)=|x-5|$, բ) $f(x)=|3x-9|$,

գ) $f(x)=|x+1|-|2x-6|$, դ) $f(x)=|2-x|+|2x-8|$:

Գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը (497-501).

497. ա) $f(x)=4-5x$, բ) $f(x)=\frac{x}{2}-1$,

գ) $f(x)=x^2-8x+5$, դ) $f(x)=4+6x-x^2$:

498. ա) $f(x)=x+\frac{1}{x}$, բ) $f(x)=\frac{2}{x}+8x$,

գ) $f(x)=\frac{x-5}{x+4}$, դ) $f(x)=\frac{1-2x}{2x+7}$:

499. ա) $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$, բ) $f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x-7$,

գ) $f(x)=4x^3-1{,}5x^4$, դ) $f(x)=x^4-18x^2-9$:

➢**500.** ա) $f(x)=e^x(x^2-24x)$, բ) $f(x)=e^x(2x^2-30)$,

գ) $f(x)=e^x(x^2-8x)$, դ) $f(x)=e^x(x^2-3x)$:

➢**501.** ա) $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$, բ) $f(x)=\log_8(x^2+4x+6)$,

գ) $f(x)=\log_{0,5}(x^2+1)$, դ) $f(x)=\log_5\frac{2}{x^2+2x+8}$:

Գծել որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ, որը բավարարում է նշված պայմաններին (502-505).

➢**502.** $D(f)=[-2;4]$, $f'(x)>0$, երբ $x\in(-2;0)$ և $f'(x)<0$, երբ $x\in(0;4)$:

➢**503.** $D(f)=[-3;3]$, $f'(x)<0$, երբ $x\in(-3;1)$ և $f'(x)>0$, երբ $x\in(1;3)$:

➢**504.** $D(f)=[-1;3]$, $f'(x)>0$, երբ $x\in(-1;0)\cup(2;3)$ և $f'(x)<0$, երբ $x\in(0;2)$:

➢**505.** $D(f)=(-4;2)$, $f'(x)<0$, երբ $x\in(-1;1)$ և $f'(x)>0$, երբ $x\in(-4;-1)\cup(1;2)$:

➢**506.** Ապացուցել ֆունկցիայի մոնոտոնությունը.

ա) $f(x)=x+\sin x$, բ) $f(x)=\cos 2x-2x$,

գ) $f(x)=2x^3-3x^2+12x-8$, դ) $f(x)=5-12x+3x^2-x^3$:

* **507.** Գտնել $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$, $bc-ad\neq 0$, կոտորակագծային ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:

➢**508.** Ապացուցել ֆունկցիայի մոնոտոնությունը:

ա) $y=2x^3-3x^2+6x-5$, բ) $y=-x^3+3x^2-9x+700$:

* **509.** Տրված է $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ եթե $ac<0$, ապա ֆունկցիան մոնոտոն չէ:

➤**510.** Ապացուցել, որ նշված միջակայքում որոշված ֆունկցիան հակադարձելի է.

ա) $f(x)=\log_2(2^x+1)+x^2-x$, $[1;+\infty)$,

բ) $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{1}{3x^3}-2x$, $(-\infty;0)$,

գ) $f(x)=x^2-2xe^x+2e^x$, $(-\infty;+\infty)$:

Ապացուցել, որ տրված հավասարումը նշված I միջակայքում ունի մեկ արմատ (511-513).

➤**511.** $x^3-27x+2=0$, ա) $I=[-1;1]$, բ) $I=[4;6]$:

➤**512.** $x^4-4x-9=0$, ա) $I=[-2;0]$, բ) $I=[2;3]$:

➤**513.** $3x^2-x^3-1=0$, ա) $I=[-2;0]$, բ) $I=[2;3]$:

➤**514.** Գտնել a թիվն այնպես, որ x_0 կետը լինի f ֆունկցիայի կրիտիկական կետ.

ա) $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x+1}$, $x_0=2$,

բ) $f(x)=\sqrt{a+4x}+\sqrt{a-2x}$, $x_0=3$:

* **515** Ինչպիսի՞ a-երի դեպքում $f(x)=\dfrac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x+1$ ֆունկցիան՝

ա) կլինի աճող, բ) կլինի նվազող, գ) չի լինի մոնոտոն:

Կրկնության համար

Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը (516-517).

516. ա) $f(x)=4x-x^2+3$, բ) $f(x)=2x^2-6x+9$,

գ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$, դ) $f(x)=\dfrac{-2}{x^2-4x+6}$:

➤**517.** ա) $f(x)=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, բ) $f(x)=-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,

գ) $f(x)=\sin^2 x$, դ) $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{4}$:

§11. Ֆունկցիայի էքստրեմումները և ածանցյալը

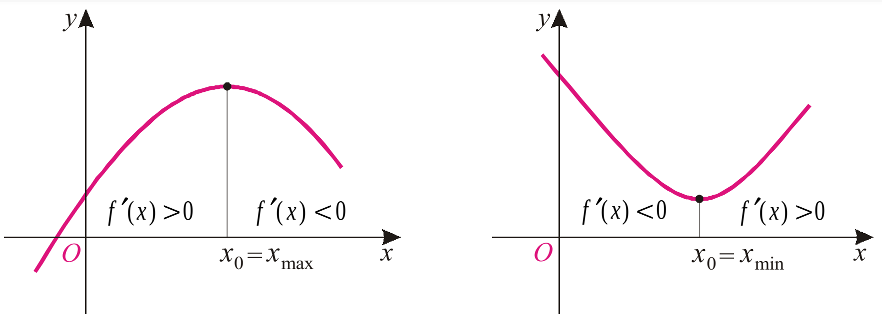
Նախորդ պարագրաֆում մենք ուսումնասիրեցինք ֆունկցիայի մոնոտոնության և ածանցյալի կապը: Այս պարագրաֆում ֆունկցիայի ածանցյալի միջոցով կհետազոտենք նրա էքստրեմումները:

Ինչպես գիտենք, եթե ֆունկցիան աճող է $(a;x_0]$ միջակայքում և նվազող՝ $[x_0;b)$-ում, ապա x_0-ն մաքսիմումի կետ է: Դիցուք f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում: Նախորդ պարագրաֆում տեսանք, որ եթե $(a;x_0)$ միջակայքում $f'(x)>0$, ապա f-ն $(a;x_0]$ միջակայքում աճող է: Եթե նաև $f'(x)<0$, երբ $x\in(x_0;b)$, ապա f-ը կլինի նվազող $[x_0;b)$-ում, և, հետևաբար, x_0-ն կլինի f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ (նկ. 30, ա): Այսպիսով, տեղի ունի հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1: (ֆունկցիայի մաքսիմումի հայտանիշ)***: Դիցուք f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, և***

1. $f'(x)>0$, ***երբ*** $x\in(a;x_0)$,
2. $f'(x)<0$, ***երբ*** $x\in(x_0;b)$:

Այդ դեպքում x_0-ն f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է՝ $x_0=x_{max}$:



ա) Նկ. 30 բ)

Համանմանորեն կարելի է համոզվել, որ տեղի ունի հետևյալ թեորեմը (նկ. 30, բ):

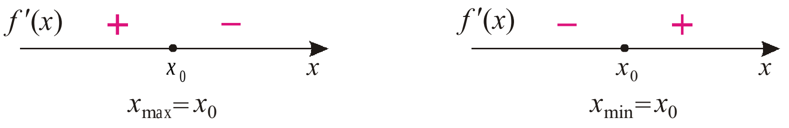
Թեորեմ 2: (ֆունկցիայի մինիմումի հայտանիշ)***: Դիցուք f ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, և***

1. $f'(x)<0$, ***երբ*** $x\in(a;x_0)$,
2. $f'(x)>0$, ***երբ*** $x\in(x_0;b)$:

Այդ դեպքում x_0-ն f ֆունկցիայի մինիմումի կետ է՝ $x_0=x_{min}$:

Այս երկու թեորեմները պարզեցված ձևակերպվում են հետևյալ կերպ.

Եթե x_0 կետի վրայով ձախից աջ շարժվելիս ֆունկցիայի ածանցյալը փոխվում է դրականից բացասականի (նկ. 31, ա), ***ապա x_0-ն մաքսիմումի կետ է, իսկ եթե փոխվում է բացասականից դրականի*** (նկ. 31, բ), ***ապա x_0-ն մինիմումի կետ է:***



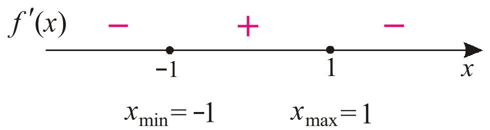
ա) Նկ. 31 բ)

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի կետերը:

Ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա և կամայական x-ի համար

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(1+x^2\right)-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}:$$

Ուստի $f'(x)=0$, երբ $x=\pm 1$, ընդ որում՝ $f'(x)>0$, եթե $x\in(-1;1)$ և $f'(x)<0$, եթե $x\in(-\infty;-1)$ կամ $x\in(1;+\infty)$ (նկ. 32):



Նկ. 32

Հետևաբար՝ $x_{min}=-1$ և $x_{max}=1$:

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x)=|x|$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը:

Ինչպես գիտենք, այս ֆունկցիան անընդհատ է, $f'(x)=-1<0$, երբ $x\in(-\infty;0)$ և $f'(x)=1>0$, երբ $x\in(0;+\infty)$: Հետևաբար՝ ֆունկցիան մաքսիմումի կետ չունի և $x_{min}=0$:

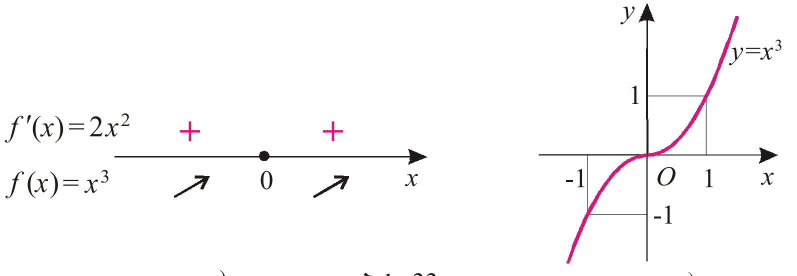
Նկատենք, որ առաջին օրինակում դիտարկված ֆունկցիայի ածանցյալը էքստրեմումի կետերում հավասար է զրոյի, իսկ երկրորդ օրինակում դիտարկված ֆունկցիան էքստրեմումի կետում ածանցյալ չունի: Պարզվում է, որ դա ընդհանուր փաստ է և, ինչպես ցույց է տալիս հետևյալ թեորեմը, կամայական ֆունկցիայի ածանցյալը էքստրեմումի կետում կա՛մ 0 է, կա՛մ գոյություն չունի:

Ֆերմայի թեորեմ: ***Եթե x_0-ն f ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է, և այդ կետում f-ն ածանցելի է, ապա $f'(x_0)=0$:***

Փաստորեն, համաձայն Ֆերմայի թեորեմի, ֆունկցիայի էքստրեմումները պետք է փնտրել նրա կրիտիկական կետերի բազմությունում: Այսինքն՝

ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը հանդիսանում են կրիտիկական կետեր:

Սակայն չպետք է կարծել, որ կամայական կրիտիկական կետ անպայմանառ էքստրեմումի կետ է: Օրինակ, $f(x)=x^3$ ֆունկցիայի համար, որի ածանցյալն է՝ $f'(x)=3x^2$, ունենք՝ $f'(0)=0$, և $f'(x)>0$, եթե $x\neq 0$ (նկ. 33, ա): Այսինքն՝ 0-ն այդ ֆունկցիայի համար կրիտիկական կետ է, սակայն էքստրեմումի կետ չէ: Այս ֆունկցիան ընդհանրապես էքստրեմումի կետ չունի. այն աճող է ամբողջ թվային առանցքի վրա (նկ. 33):



ա) Նկ. 33 բ)

Այսպիսով, ածանցյալի միջոցով ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը գտնելու համար անհրաժեշտ է՝

1. *ֆունկցիան ածանցել,*

2. *գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը,*

3. *եթե կրիտիկական կետի վրայով ձախից աջ անցնելիս՝*

ա) *ածանցյալը փոխվում է դրականից բացասական* (նկ. 31, ա), ***ապա այդ կետը մաքսիմումի կետ է,***

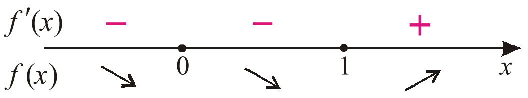
բ) *ածանցյալը փոխվում է բացասականից դրական* (նկ. 31, բ), ***ապա այդ կետը մինիմումի կետ է,***

գ) *ածանցյալը պահպանում է նշանը, ապա այդ կետը էքստրեմումի կետ չէ* (նկ. 33)**:**

Օրինակ 3: Գտնենք $f(x)=3x^4-4x^3+25$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, կրիտիկական կետերը և էքստրեմումի կետերը:

Նախ՝ $D(f)=\mathbf{R}$ և $f'(x)=12x^3-12x^2$, $x\in\mathbf{R}$: Լուծելով $f'(x)=0$ հավասարումը, գտնում ենք կրիտիկական կետերը՝ $x=0$ և $x=1$:

Այնուհետև գտնում ենք, որ $f'(x)>0$, երբ $x\in(1;+\infty)$, և $f'(x)<0$, երբ $x\in(-\infty;0)\cup(0;1)$ (նկ. 34): Կրիտիկական կետերից 0-ն էքստրեմումի կետ չէ, քանի որ այդ կետի վրայով



$x_{\min}=1$

Նկ. 34

անցնելիս ածանցյալը չի փոխում նշանը: Ֆունկցիան նվազող է $(-\infty;1]$ և աճող՝ $[1;+\infty)$ միջակայքերում, իսկ 1-ը մինիմումի կետ է:

Պատասխան՝ ֆունկցիան նվազող է $(-\infty;1]$-ում, աճող՝ $[1;+\infty)$-ում, $x_{\min}=1$, կրիտիկական կետերն են՝ $0;1$:

Հակացե՞լ եք դասը

1. Ձևակերպեք ֆունկցիայի մաքսիմումի հայտանիշը:
2. Ձևակերպեք ֆունկցիայի մինիմումի հայտանիշը:
3. Ձևակերպեք ֆունկցիայի էքստրեմումի պարզեցված հայտանիշը:
4. Ձևակերպեք Ֆերմայի թեորեմը:
5. Կամայական կրիտիկական կետ էքստրեմումի կե՞տ է արդյոք:
6. Ինչպե՞ս են գտնում ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը:

Առաջադրանքներ

518. Գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը.

ա) $f(x)=x^4+4x^3+8x^2+6$, բ) $f(x)=x^3-3x^4-5$,

գ) $f(x)=\sin^2 x+\cos x$, դ) $f(x)=2\cos x-x$:

Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը (519-521).

519. ա) $f(x)=3x^2-6x-5$, բ) $f(x)=6-8x-x^2$,

գ) $f(x)=x^3+3x^2-9x+4$, դ) $f(x)=3x^4-8x^3-18x^2$:

520. ա) $f(x)=3x^5-5x^3+3$, բ) $f(x)=3x^5-5x^3-30x$,

գ) $f(x)=e^x\left(24-x^2\right)$, դ) $f(x)=e^x\left(x^2-3\right)$:

521. Գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը և էքստրեմումները.

ա) $f(x)=\dfrac{3x+6}{x^2+5}$, բ) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2+12}$,

գ) $f(x)=\dfrac{3}{x^4+3x^2+17}$, դ) $f(x)=-\dfrac{1}{x^4+5x^2+3}$:

Գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը (522-524).

➤**522** ա) $f(x)=|x+3|-5$, բ) $f(x)=|2x-5|$:

➤**523.** ա) $f(x)=\left|x^2-2x\right|$, բ) $f(x)=\left|4x-x^2\right|$:

*524. ա) $f(x)=3x^2-2x+|x+1|$, բ) $f(x)=2x^3-3x^2-6x-6|x-1|$ ։

525. Ցույց տալ, որ ֆունկցիան կրիտիկական կետեր չունի.

ա) $f(x)=3x^5+5x^3-2x^2+9x-21$,

բ) $f(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+10x-\frac{1}{2}\sin 2x$ ։

526. Ցույց տալ, որ ֆունկցիան էքստրեմումի կետեր չունի.

ա) $f(x)=x^5+4x^7-9$, բ) $f(x)=x^3-3x^2+3x$,

գ) $f(x)=x+\sin x$, դ) $f(x)=\cos x-x$ ։

*527. Գտնել a և b թվերն այնպես, որ x_1-ը և x_2-ը լինեն f ֆունկցիայի կրիտիկական կետեր.

ա) $f(x)=x^3+ax^2+bx+5,\quad x_1=-2,\quad x_2=4$,

բ) $f(x)=a\sin 2x+b\cos 3x+\frac{3}{4}\operatorname{tg} 4x,\quad x_1=\frac{\pi}{6},\quad x_2=\frac{\pi}{3}$ ։

* 528. Տրված է $f(x)=x^3+3ax+1$ ֆունկցիան։ Ինչպիսի՞ a-երի դեպքում՝

ա) ֆունկցիան կլինի աճող,

բ) ֆունկցիան կունենա մեկ կրիտիկական կետ,

գ) ֆունկցիայի արժեքը մինիմումի կետում կլինի -15 ։

* 529. Դիցուք x_1-ը $f(x)=2x^3-9ax^2+12a^2x+1$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է, իսկ x_2-ը՝ մինիմումի։ Գտեք a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $x_2=x_1^2$ ։

* 530. Դիցուք x_1-ը $f(x)=3x^3-ax^2+2x+5$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է, իսկ x_2-ը՝ մինիմումի։ Գտեք a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $x_1=2x_2$ ։

* 531. $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի կետերն են, համապատասխանաբար, 1-ը և 3-ը։ Ընդ որում՝ $y_{\max}=6$ և $y_{\min}=2$ ։ Գտնել a, b, c, d թվերը։

* 532. $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի կետերն են, համապատասխանաբար, -1-ը և 1-ը։ Ընդ որում՝ $y_{\max}=6$ և $y_{\min}=-2$ ։ Գտնել a, b, c, d թվերը։

Կրկնության համար

Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները նշված միջակայքում (533-534).

533. ա) $f(x)=x^2-2x-1$, $[2;3]$, բ) $f(x)=x-2x^2+3$, $[1;3]$։

534. ա) $f(x)=\frac{3x-5}{x+1}$, $[0;2]$, բ) $f(x)=\frac{4-x}{x+4}$, $[-1;1]$։

§12. Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները

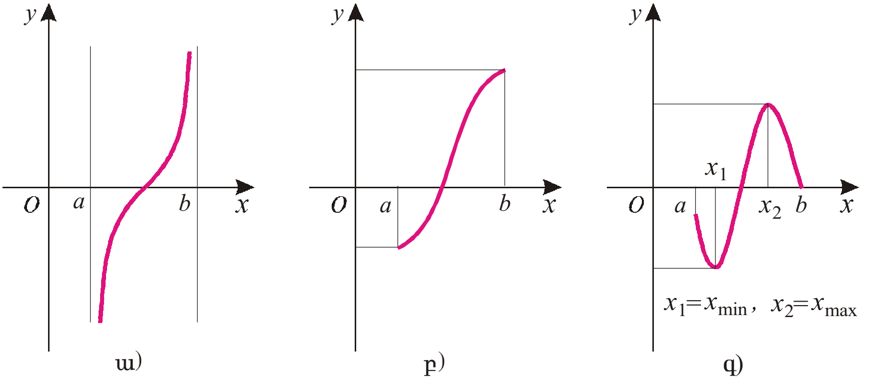
Կիրառական նշանակություն ունեցող շատ խնդիրներում անհրաժեշտ է լինում գտնել որևէ ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը տրված միջակայքում: Հնարավոր է երեք դեպք.

1. ֆունկցիան միջակայքում մեծագույն (փոքրագույն) արժեք չունի (նկ. 35ա),

2. ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ընդունում է միջակայքի ծայրակետում (նկ. 35բ),

3. ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ընդունում է միջակայքի ներքին կետում (նկ. 35գ):

Պարզ է, որ վերջին դեպքում այդ կետը կլինի նաև էքստրեմումի կետ:



Նկ. 35

Վերը ասվածից կարելի է անել հետևյալ եզրակացությունը.

Եթե ֆունկցիան որևէ միջակայքում ունի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք, ապա այդ արժեքը պետք է փնտրել միջակայքի ծայրակետերում և էքստրեմումի կետերում ֆունկցիայի ընդունած արժեքների բազմության մեջ:

Ինչպես նշեցինք, ֆունկցիան միջակայքում մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք կարող է չունենալ: Այդպիսին է, օրինակ, 35-րդ ա) նկարում գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիան: Սակայն նկատենք, որ այդ ֆունկցիան անընդհատ չէ $[a;b]$ միջակայքի ծայրակետերում: Պարզվում է, որ.

եթե ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ միջակայքում, ապա այն ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

Այս պնդումը Վայերշտրասի թեորեմն է, որը մենք կընդունենք առանց ապացուցման:

Կիրառական խնդիրներում հանդիպող ֆունկցիաները, որպես կանոն, միջակայքում ունենում են վերջավոր թվով էքստրեմումներ: Նախորդ պարագրաֆում մենք տեսանք, որ էքստրեմումի կետերը պետք է փնտրել կրիտիկական կետերի բազմության մեջ:

Ամփոփելով ասվածը, կարող ենք ձևակերպել հետևյալ հաշվեկանոնը:

$[a;b]$ միջակայքում անընդհատ f ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը գտնելու համար անհրաժեշտ է.

1. ***գտնել f ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը,***
2. ***այդ կետերից ընտրել այն $x_1, x_2, \ldots, x_k$ կետերը, որոնք պատկանում են $[a;b]$ միջակայքին,***
3. ***հաշվել $f(a)$, $f(b)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_k)$ արժեքները,***
4. ***ստացված արժեքներից ամենամեծը կլինի ֆունկցիայի մեծագույն, իսկ ամենափոքրը՝ փոքրագույն արժեքը:***

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=x^3-9x^2+24x-5$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները $[0;3]$ միջակայքում:

Ֆունկցիայի ածանցյալն է՝

$$f'(x)=3x^2-18x+24:$$

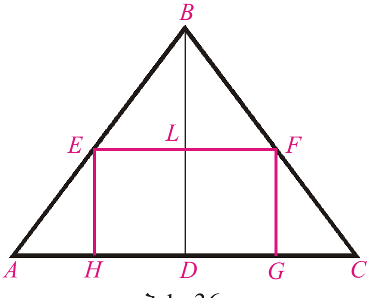
Լուծելով $f'(x)=0$ հավասարումը, գտնում ենք ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը՝ $x_1=2$ և $x_2=4$, որոնցից միայն առաջինն է պատկանում $[0;3]$ միջակայքին (ուստի $f(4)$-ը պետք չէ հաշվել): Հաշվելով ֆունկցիայի արժեքները $x=2$ կրիտիկական կետում ու միջակայքի 0 և 3 ծայրակետերում, ստանում ենք՝

$$f(0)=-5,\quad f(2)=15,\quad f(3)=13:$$

Այսպիսով, $[0;3]$ միջակայքում f ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 15-ն է, իսկ փոքրագույնը՝ -5-ը: Ընդ որում, ֆունկցիան մեծագույն արժեքն ընդունում է 2 կետում, իսկ փոքրագույնը՝ 0 կետում: Ասվածը համառոտ գրվում է այսպես.

$$\max_{[0;3]} f(x)=f(2)=15 \text{ և } \min_{[0;3]} f(x)=f(0)=-5:$$

Օրինակ 2: Հավասարասրուն եռանկյանը, որի հիմքը 6 է, իսկ սրունքը՝ 5, ներգծած է ուղղանկյուն, որի երկու գագաթները գտնվում են եռանկյան հիմքի վրա, իսկ մյուս երկուսը՝ սրունքների (նկ. 36): Գտնենք, թե ինչպիսի՞ մեծագույն մակերես կարող է ունենալ այդպիսի ուղղանկյունը:



Նկ. 36

Այս խնդիրը լուծելու համար նախ փորձենք այն ներկայացնել ֆունկցիաների լեզվով:

Տանենք ABC եռանկյան BD բարձրությունը: Դժվար չէ տեսնել, որ $BD = 4$: Ներգծած $EFGH$ ուղղանկյան EF կողմի երկարությունը նշանակենք x-ով: Պարզ է, որ $0 < x < 6$: Քանի որ $\Delta ABC \sim \Delta EBF$, իսկ BD-ն և BL-ը համապատասխան բարձրություններ են, ուստի $\frac{BL}{BD} = \frac{EF}{AC}$: Հաշվի առնելով, որ $BL = BD - LD = BD - FG$, ստանում ենք՝

$$\frac{4 - FG}{4} = \frac{x}{6}, \text{ որտեղից՝ } FG = \frac{12 - 2x}{3}:$$

Հետևաբար, $EFGH$ ուղղանկյան մակերեսը կլինի՝ $\frac{x(12 - 2x)}{3}$:

Այսպիսով, պետք է գտնենք

$$f(x) = \frac{x(12 - 2x)}{3}$$

ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը $(0;\ 6)$ միջակայքում: Լուծելով

$$f'(x) = \frac{12 - 4x}{3} = 0$$

հավասարումը, ստանում ենք $x = 3$ միակ կրիտիկական կետը, ընդ որում, $f(3) = 6$, իսկ $f(0) = f(6) = 0$: Հետևաբար, $[0;\ 6]$ միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 6 է, որը այն ընդունում է $x = 3$ կետում: Քանի որ այդ կետը պատկանում է $(0;\ 6)$ միջակայքին, ուրեմն $f(3) = 6$ արժեքը մեծագույնն է նաև $(0;\ 6)$ միջակայքում:

Պատասխան՝ 6:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Կարո՞ղ է ֆունկցիան միջակայքում չունենալ մեծագույն (փոքրագույն) արժեք:
2. Կարո՞ղ է ֆունկցիան միջակայքում մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ընդունել այդ միջակայքի ծայրակետում:
3. Եթե ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքն ընդունում է միջակայքի ներքին կետում, ապա ինչպիսի՞ կետ է այդ կետը:
4. Ֆունկցիայի ո՞ր արժեքների մեջ պետք է փնտրել նրա մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:
5. Ձևակերպեք Վայերշտրասի թեորեմը:
6. Ձևակերպեք $[a;\ b]$ միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները գտնելու հաշվեկանոնը:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները նշված միջակայքում (535-541).

535. ա) $f(x) = 4x - x^2 + 1$, $[1;\ 3]$, բ) $f(x) = x^2 + 3x - 2$, $[-3;\ 0]$, գ) $f(x)=x^4-2x^2+5$, $[-1;1]$, դ) $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$, $[0;2]$:

536. ա) $f(x)=4x-1$, $[-2;0]$, բ) $f(x)=9-5x$, $[-1;1]$,

գ) $f(x)=x^3-3x$, $[2;5]$, դ) $f(x)=x^4-8x^3$, $[0;5]$:

537. ա) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$, $[1;3]$, բ) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$, $[-1;2]$,

գ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+8}$, $[-2;1]$, դ) $f(x)=3+2x+\dfrac{27}{x^2}$, $[1;5]$:

➢**538.** ա) $f(x)=xe^{-2x-8}+1$, $[-4;0]$, բ) $f(x)=5+xe^{-3x-9}$, $[-3;0]$,

գ) $f(x)=-xe^{4x-8}$, $[0;2]$, դ) $f(x)=2-xe^{3x-9}$, $[0;3]$:

➢**539.** ա) $f(x)=(5x-4)^{12}+60x$, $[0;0{,}8]$, բ) $f(x)=(2x+3)^{14}-28x$, $[-1{,}5;0]$:

540. ա) $f(x)=2\sin^2 x-2\sin x-1$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$,

բ) $f(x)=\cos^2 x+2\cos x-5$, $[0;\pi]$:

➢**541.** ա) $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$, $[-\pi;\pi]$,

բ) $f(x)=(x+3)\sin x-(x+1)\cos x$, $[0;\pi]$,

գ) $f(x)=(3-x^2)\cos x+2x\sin x$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$:

* **542.** Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում

ա) $f(x)=ax-x^4$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 48 է,

բ) $f(x)=\dfrac{ax}{x^2+9}$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերությունը 3 է:

* **543.** Գտեք, թե a-ի որ արժեքների դեպքում $f(x)=e^x+a\cdot e^{-x}$ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը կլինի 6:

* **544.** Գտեք a-ն, եթե հայտնի է, որ $f(x)=\ln x-a\ln(x+1)+\ln(a-1)$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը $-a$ է:

* **545.** Գտնել $(1;14)$ կետի փոքրագույն հեռավորությունը $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկին պատկանող կետից:

546. 14-ը ներկայացնել երկու ոչ բացասական թվերի գումարով այնպես, որ այդ թվերի քառակուսիների գումարը լինի փոքրագույնը:

547. 20 -ը ներկայացնել երկու ոչ բացասական թվերի գումարով այնպես, որ այդ թվերի արտադրյալը լինի մեծագույնը:

➢ **548.** Ինչպիսի՞ք պետք է լինեն S մակերես ունեցող ուղղանկյան չափերը, որպեսզի այն ունենա՝ ա) փոքրագույն պարագիծ, բ) փոքրագույն անկյունագիծ:

➢ **549.** Գտնել R շառավղով շրջանին ներգծած այն ուղղանկյան չափերը, որն ունի՝ ա) ամենամեծ մակերեսը, բ) ամենամեծ պարագիծը:

➢ **550.** Գտնել $2p$ պարագիծ ունեցող այն հավասարասրուն եռանկյան սրունքը, որն ունի ամենամեծ մակերեսը:

➢ **551.** Ինչպիսի՞ն պետք է լինի P պարագիծ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը, որպեսզի նրա ներքնաձիգը լինի ամենափոքրը:

➢ **552.** Ինչպիսի՞ն պետք է լինի c ներքնաձիգ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը, որպեսզի նրան ներգծած շրջանագծի շառավիղը լինի մեծագույնը:

➢ **553.** $AD = 2R$ տրամագծով կիսաշրջանագծին ներգծած է ամենամեծ մակերեսով $ABCD$ սեղանը: Գտնել նրա BC հիմքը:

➢ **554.** R շառավղով շրջանագիծը շոշափում է հավասարասրուն եռանկյան սրունքները, իսկ կենտրոնը գտնվում է հիմքի վրա: Ինչպիսի՞ փոքրագույն սրունք կարող է ունենալ այդ եռանկյունը:

➢ **555.** ABC եռանկյանը ներգծած է $AKPQ$ զուգահեռագիծը, որն ունի մեծագույն մակերեսը: Գտնել այդ զուգահեռագծի կողմերը, եթե $AB = c$, $AC = b$:

➢ **556.** ABC սուրանկյուն եռանկյանը ներգծած է ուղղանկյուն, որի երկու գագաթները գտնվում են AC կողմի վրա, մեկական՝ AB և BC կողմերի վրա: Գտնել ուղղանկյան անկյունագծի երկարության փոքրագույն արժեքը, եթե $AC = 20$, իսկ նրան տարած բարձրությունը՝ $BD = 15$:

* **557.** S մակերես ունեցող $ABCD$ զուգահեռագծի C գագաթով տարված ուղիղը AB և AD ճառագայթները հատում է, համապատասխանաբար, M և N կետերում: Ինչպիսի՞ փոքրագույն մակերես կարող է ունենալ AMN եռանկյունը:

* **558.** Եռանկյան երկու կողմերից յուրաքանչյուրն ունի a երկարություն: Գտնել երրորդ կողմի երկարությունն այնպես, որ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը լինի ամենամեծը:

* **559.** Գտեք R շառավղով գնդին արտագծած փոքրագույն ծավալով կոնի հիմքի շառավիղը:

* **560.** Գտնել տրված V ծավալով գլաններից ամենամեծ լրիվ մակերևույթի մակերես ունեցողի հիմքի շառավիղը:

Կրկնության համար

561. Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են զույգ և որոնք՝ կենտ.

ա) $y = x^3 + \sin 3x$, բ) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$, գ) $y = x^6 - 3x^3 + \sin x$,

դ) $y = \left(x^2 + 1\right)\sin^2 x$, ե) $y = \cos x + x^6 - |x|$, զ) $y = \dfrac{x^3 - 1}{\sin x}$:

562. Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը.

ա) $\cos x \cdot \sin x$, բ) $\sin^2 x - \cos^2 x$, ➢գ) $\dfrac{\sin 4x}{\sin^2 2x + \sin 2x}$:

§13. Ֆունկցիայի հետազոտումն ածանցյալի միջոցով

Նախորդ պարագրաֆներում մենք տեսանք, որ ֆունկցիայի որոշ հատկություններ հեշտությամբ բացահայտվում են ածանցյալի օգնությամբ, ուստի ածանցյալի կիրառումը հեշտացնում է նաև ֆունկցիայի հետազոտումն ու գրաֆիկի կառուցումը:

Ֆունկցիայի հետազոտման, որի ուրվագիծը, ինչպես գիտենք, բաղկացած է հետևյալ քայլերից:

1) ***Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:***

2) ***Պարզել՝ ֆունկցիան պարբերակա՞ն է, թե՝ ոչ:***

3) ***Պարզել ֆունկցիայի զույգությունը:***

4) ***Որոշել ֆունկցիայի գրաֆիկի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերը:***

5) ***Գտնել ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը:***

6) ***Գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերն ու էքստրեմումի կետերը:***

7) ***Հաշվել ֆունկցիայի արժեքներն էքստրեմումի կետերում:***

8) ***Եթե ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բաղկացած է մեկ կամ մի քանի միջակայքերից, ապա պարզել ֆունկցիայի վարքն այդ միջակայքերի ծայրակետերին մոտենալիս:***

Այս քայլերից 6-րդը կատարելիս արդյունավետ է ածանցյալի կիրառումը: Ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը գտնելով՝ հեշտությամբ կարող ենք գտնել մոնոտոնության միջակայքերն ու էքստրեմումի կետերը:

Օրինակ 1: Հետազոտենք $f(x)=x^4-5x^2+4$ ֆունկցիան և կառուցենք նրա գրաֆիկը:

1) Ակնհայտ է, որ $D(f)=\mathbf{R}$:

2) Ֆունկցիան պարբերական չէ:

3) Ֆունկցիան զույգ է, քանի որ

$$f(-x)=(-x)^4-5(-x)^2+4=x^4-5x^2+4=f(x):$$

4) Ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է օրդինատների առանցքը $(0;\,4)$ կետում: Լուծելով $x^4-5x^2+4=0$ երկքառակուսի հավասարումը, գտնում ենք ֆունկցիայի զրոները՝ $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=1$ և $x_4=2$: Հետևաբար, ֆունկցիայի գրաֆիկի և աբսցիսների

առանցքի հատման կետերն են՝ $(-2;0)$, $(-1;0)$, $(1;0)$ և $(2;0)$:

5) Քանի որ f-ը բազմանդամ է, ուրեմն՝ անընդհատ է, և նրա զրոներով թվային առանցքը տրոհվում է նշանապահպանման միջակայքերի՝ $(-\infty;-2)$, $(-2;-1)$, $(-1;1)$, $(1;2)$ և $(2;+\infty)$: Դժվար չէ ստուգել, որ $(-2;-1)$ և $(1;2)$ միջակայքերում ֆունկցիան բացասական է, իսկ մյուսներում՝ դրական:

6) Ֆունկցիայի ածանցյալն է՝

$$f'(x)=4x^3-10x:$$

Լուծելով $f'(x)=0$ հավասարումը, գտնում ենք ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը՝ $x=\pm\sqrt{2{,}5}$ և $x=0$: Որոշելով ածանցյալի նշանները համապատասխան միջակայքերում, գտնում ենք, որ ֆունկցիան աճում է $\left[-\sqrt{2{,}5};\,0\right]$, $\left[\sqrt{2{,}5};+\infty\right)$ միջակայքերում և նվազում՝ $\left(-\infty;-\sqrt{2{,}5}\right]$, $\left[0;\sqrt{2{,}5}\right]$ միջակայքերում: Ֆունկցիայի էքստրեմումներն են՝

$$x_{\min}=-\sqrt{2{,}5},\quad x_{\max}=0,\quad x_{\min}=\sqrt{2{,}5}:$$

7) Հաշվելով ֆունկցիայի արժեքները էքստրեմումի կետերում, ստանում ենք՝

$$f\left(-\sqrt{2{,}5}\right)=f\left(\sqrt{2{,}5}\right)=-2{,}25 \text{ և } f(0)=4:$$

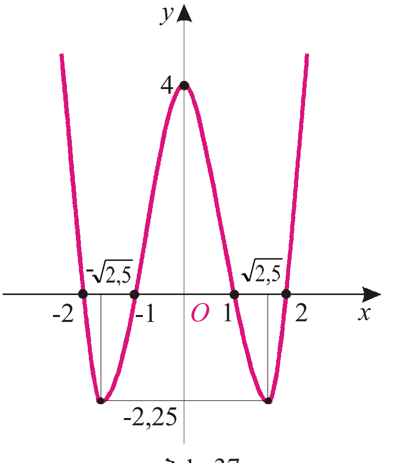
Ասվածը հարմար է գրել աղյուսակի տեսքով:

x	$\left(-\infty;\sqrt{2{,}5}\right)$	$-\sqrt{2{,}5}$	$\left(-\sqrt{2{,}5};0\right)$	0	$\left(0;\sqrt{2{,}5}\right)$	$\sqrt{2{,}5}$	$\left(\sqrt{2{,}5};\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-2{,}25$	↗	4	↘	$-2{,}25$	↗
		min		max		min	

Ֆունկցիան ներքևից սահմանափակ է և մինիմումի կետերում ընդունում է նաև փոքրագույն արժեքը: Ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ և մեծագույն արժեք չունի:

8) Երբ x-ը ձգտում է $+\infty$-ի կամ $-\infty$-ի, ֆունկցիայի արժեքները ձգտում են $+\infty$-ի:

Ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար նախ կոորդինատային հարթության վրա նշենք $(0;4)$, $(-2;0)$, $(-1;0)$, $(1;0)$ և $(2;0)$ կետերը, որոնցում գրաֆիկը հատվում է կոորդինատային առանցքների հետ: Այնուհետև նշենք $\left(-\sqrt{2{,}5};-2{,}25\right)$ և



Նկ. 37

$\left(\sqrt{2{,}5}; -2{,}25\right)$ կետերը, որոնք համապատասխանում են ֆունկցիայի էքստրեմումներին (նկ. 40): Եվ վերջապես, հաշվի առնելով ֆունկցիայի վարքը մոնոտոնության միջակայքերում և x-ը $\pm\infty$-ի ձգտելիս՝ ստանում ենք ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկը (նկ. 37):

Օրինակ 2: Կառուցենք $f(x)=\dfrac{8(x+1)}{x^2+8}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Պարզ է, որ $D(f)=\mathbf{R}$:

Ֆունկցիան ունի միակ զրո՝ $x=-1$, իսկ $f(0)=1$: Այսինքն՝ ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է կոորդինատների առանցքները $(-1;0)$ և $(0;1)$ կետերում:

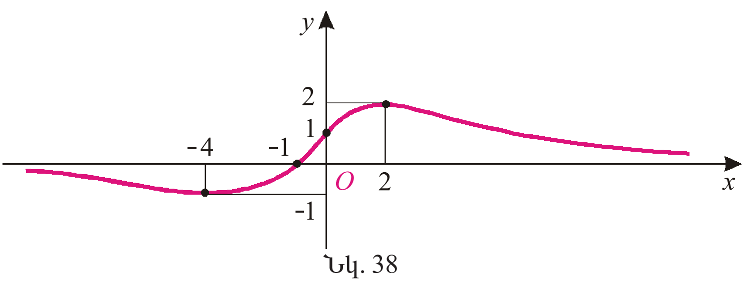
Ֆունկցիան բացասական է $(-\infty; -1)$ միջակայքում և դրական՝ $(1;\infty)$ միջակայքում: Ֆունկցիայի ածանցյալն է՝

$$f'(x)=-\frac{8(x^2+2x-8)}{(x^2+8)^2},\quad x\in\mathbf{R}\,:$$

Ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը $x^2+2x-8=0$ հավասարման արմատներն են՝ $x_1=-4,\ x_2=2$:

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;2)$	2	$(2;\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$
		min		max	

Լրացնելով բերված աղյուսակը և հաշվի առնելով վերը բերված հատկությունները, դժվար չէ կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 38):



Նկ. 38

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ կամայական x-ի համար

$$x\le e^{x-1}:$$

Դիտարկենք $f(x)=x\cdot e^{1-x}$ ֆունկցիան: Դժվար չէ ստուգել, որ

$$f'(x)=e^{1-x}(1-x):$$

Այստեղից ստանում ենք՝ $f'(x)>0$, երբ $x\in(-\infty;1)$ և $f'(x)<0$, երբ $x\in(1;+\infty)$, այսինքն՝ $(-\infty;1]$ միջակայքում f ֆունկցիան աճող է, իսկ $[1;+\infty)$-ում՝ նվազող: Հետևաբար՝ $x_0=1$ կետում ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը՝ $f(x)\le f(1)$, $x\in\mathbf{R}$: Քանի որ $f(1)=1$, ուրեմն՝ կամայական x-ի համար $x\cdot e^{1-x}\le 1$ կամ, որ նույնն է, $x\le e^{x-1}$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ֆունկցիայի ո՞ր հատկությունները ուսումնասիրելիս է կիրառվում ածանցյալը:
2. Ի՞նչ քայլերից է բաղկացած ֆունկցիայի հետազոտման ուրվագիծը:

Առաջադրանքներ

Հետազոտել ֆունկցիան և կառուցել գրաֆիկը (252-254).

563. ա) $f(x)=x^2+8x-9$, բ) $f(x)=x^2+2x+6$,

գ) $f(x)=2-4x-x^2$, դ) $f(x)=-x^2+4x-8$:

564. ա) $f(x)=-2x^3+6x+1$, բ) $f(x)=x^3+3x+2$,

գ) $f(x)=x^4-2x^2-3$, դ) $f(x)=x^4-16x^2$:

➢**565.** ա) $f(x)=e^x(x-1)$, բ) $f(x)=e^{-x}(x+2)$:

➢**566.** ա) $f(x)=e^x(x^2-2x+1)$, բ) $f(x)=e^{-x}(x^2+6x+9)$:

➢**567.** Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $\operatorname{tg} x>x$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, բ) $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$, $x\in(0;+\infty)$,

գ) $\ln(1+x)<x$, $x\in(0;+\infty)$, դ) $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$, $x\in(0;+\infty)$:

Հետազոտել ֆունկցիան և կառուցել գրաֆիկը (568-569).

➢**568.** ա) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, բ) $f(x)=x\sqrt{3-x}$,

գ) $f(x)=\sqrt{5-x^2+4x}$, դ) $f(x)=x\sqrt{x+5}$:

➢**569.** ա) $f(x)=\frac{x}{x-1}$, բ) $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$,

գ) $f(x)=\frac{6(x-1)}{x^2+3}$, դ) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$:

➢**570.** Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$, $\alpha \geq 1$, $x \geq 0$, բ) $e^{x} \geq 1+x$, $x \geq 0$:

Կրկնության համար

571. A և B վայրերից, որոնց միջև հեռավորությունը 50 կմ է, միաժամանակ միմյանց ընդառաջ դուրս եկան երկու հետիոտն: 5 ժ հետո նրանք հանդիպեցին: Հանդիպումից հետո առաջինի արագությունը, որը A-ից գնում էր B, 1կմ/ժ-ով մեծացավ: Հայտնի է, որ առաջին հետիոտնը B հասավ 50 ր շուտ, քան երկրորդը հասավ A: Որոշել առաջին հետիոտնի սկզբնական արագությունը:

572. A և B քաղաքներից միաժամանակ միմյանց ընդառաջ դուրս եկան երկու ավտոմեքենա ու հանդիպեցին 5 ժ հետո: A-ից մեկնած ավտոմեքենայի արագությունը 10 կմ/ժ-ով փոքր է մյուս մեքենայի արագությունից: Եթե առաջին մեքենան A-ից մեկներ երկրորդից 4,5 ժ շուտ, ապա հանդիպումը կկայանար B-ից 150 կմ հեռավորության վրա: Գտնել A և B քաղաքների միջև եղած հեռավորությունը:

§14. Երկրորդ կարգի ածանցյալ

Ենթադրենք $f: X \to R$ ֆունկցիան X միջակայքում ածանցելի է: Եթե $y=f'(x)$ ֆունկցիան որևէ $x_0 \in X$ կետում ունի ածանցյալ, ապա այն անվանում են f ֆունկցիայի ***երկրորդ կարգի ածանցյալ*** x_0 կետում և նշանակում են $f''(x_0)$:

Պարզ է, որ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը գտնելու համար պետք չեն ածանցման նոր կանոններ և աղյուսակներ. անհրաժեշտ է նախ գտնել ֆունկցիայի ածանցյալ ֆունկցիան, այնուհետև գտնել վերջինիս ածանցյալը:

Նման եղանակով կարելի է սահմանել նաև ավելի բարձր կարգի ածանցյալներ: Սակայն դպրոցական դասընթացում կբավարարվենք երկրորդ կարգի ածանցյալով և նրա կիրառություններով:

Քանի որ ֆունկցիաների գումարի (տարբերության) ածանցյալը ֆունկցիաների ածանցյալների գումարն է (տարբերությունն է), երկրորդ ածանցյալի համար նույնպես կունենանք.

$$(f \pm g)''=f'' \pm g'', \quad (kf)''=kf'':$$

Օրինակ 1: Գտնենք $f(x)=x^2+5x-6$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը: Օգտվելով երկրորդ կարգի ածանցյալի սահմանումից՝ ստանում ենք.

$$f'(x)=(x^2+5x-6)'=2x+5, \quad f''(x)=(2x+5)'=2:$$

Օրինակ 2: Գտնենք $f(x) = \sin 2x$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալն $x_0 = \frac{5\pi}{12}$ կետում: Քանի որ $f'(x) = 2\cos 2x$, ուստի

$$f''(x) = (2\cos 2x)' = -4\sin x :$$

Հետևաբար՝ $f''\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -4\sin\frac{5\pi}{6} = -2$:

Դիտարկենք $s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող նյութական կետը, այսինքն՝ ժամանակի t պահին կետը գտնվում է կոորդինատային ուղղի $s(t)$ կետում: Հիշենք, որ այս դեպքում կետի $V(t)$ արագությունը որոշվում է $V(t) = s'(t)$ բանաձևով, իսկ $a(t)$ արագացումը՝ $a(t) = V'(t)$ բանաձևով: Հետևաբար՝ $a(t)$ արագացումը $s(t)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալն է՝

$$\boldsymbol{a(t) = s''(t)} :$$

Օրինակ 3: Դիցուք նյութական կետն ուղղագիծ շարժվում է $s(t) = t(\sin t + 1)$ օրենքով: Գտնենք նյութական կետի արագացումը $t_0 = \pi$ վրկ պահին, եթե ճանապարհը չափվում է մետրերով, իսկ ժամանակը վայրկյաններով:

Ունենք՝ $s'(t) = (t\sin t)' + t' = \sin t + t\cos t + 1$, ուստի

$$a(t) = s''(t) = (\sin t + t\cos t + 1)' = \cos t + \cos t - t\sin t = 2\cos t - t\sin t :$$

Հետևաբար՝ $a(\pi) = -2$ մ/վրկ^2:

Օրինակ 4: Երկու նյութական կետ ուղղագիծ շարժվում են, համապատասխանաբար,

$$s_1(t) = 2t^3 + 6t \text{ և } s_2(t) = t^3 + 3t^2 + 5t$$

օրենքներով, որտեղ ժամանակը չափվում է վայրկյաններով, իսկ ճանապարհը՝ մետրերով: Գտնենք նյութական կետերի արագություններն այն պահին, երբ նրանց արագացումները հավասար են:

Գտնենք կետերի արագությունները և արագացումները.

$$V_1(t) = s_1'(t) = 6t^2 + 6, \quad a_1(t) = V_1'(t) = 12t,$$

$$V_2(t) = s_2'(t) = 3t^2 + 6t + 5, \quad a_2(t) = V_2'(t) = 6t + 6 :$$

$a_1(t) = a_2(t)$ պայմանից ստանում ենք՝ $t = 1$: Ուստի պետք է հաշվել կետերի արագությունները $t = 1$ (վրկ) պահին: Արագությունների բանաձևերում տեղադրելով

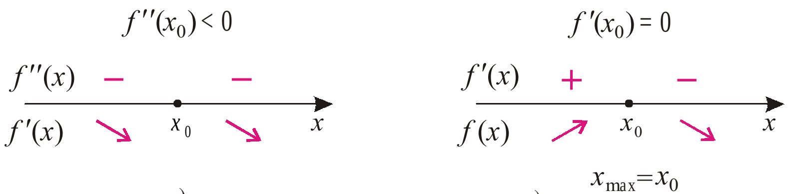
$t=1$, ստանում ենք, որ $V_1(1)=12$, $V_2(1)=14$:

Պատասխան՝ 12մ/վրկ, 14մ/վրկ:

Երկրորդ կարգի ածանցյալը հաճախ օգտակար է լինում ֆունկցիայի էքստրեմումներն ուսումնասիրելիս: 11-րդ պարագրաֆում տեսանք, թե ածանցյալի օգնությամբ ինչպես են որոշվում ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը. եթե x_0 կրիտիկական կետի վրայով ձախից աջ շարժվելիս ֆունկցիայի ածանցյալը փոխվում է դրականից բացասականի ապա x_0-ն մաքսիմումի կետ է, իսկ եթե փոխվում է բացասականից դրականի՝ ապա x_0-ն մինիմումի կետ է:

Այժմ ենթադրենք $y=f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալն անընդհատ ֆունկցիա է, $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)<0$: Այդ դեպքում x_0-ի ինչ-որ շրջակայքում $f'(x)<0$: Հետևաբար $f'(x)$ ֆունկցիան, որի ածանցյալը $f''(x)$-ն է, նվազող է այդ շրջակայքում (նկ. 39, ա):

Հաշվի առնելով, որ $f'(x_0)=0$, ստանում ենք, որ այդ շրջակայքում x_0-ից ձախ $f'(x)>0$, իսկ x_0-ից աջ՝ $f'(x)<0$: Ուրեմն՝ x_0-ն f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է (նկ. 39, բ): Այսպիսով,



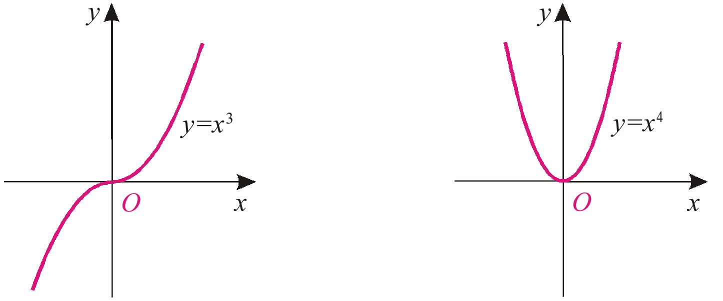
ա) Նկ. 39 բ)

եթե $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)<0$, ապա x_0-ն f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է:

Համանմանորեն,

եթե $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)>0$, ապա x_0-ն f ֆունկցիայի մինիմումի կետ է:

Եթե $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)=0$, ապա x_0 կետի՝ էքստրեմումի կետ լինելու մասին ոչինչ ասել չենք կարող: Իրոք, $f_1(x)=x^3$ և $f_2(x)=x^4$ ֆունկցիաների թե՛ առաջին և թե՛ երկրորդ ածանցյալները $x_0=0$ կետում զրո են: Այդ ֆունկցիաներից առաջինի համար $x_0=0$ կետը էքստրեմումի կետ չէ, իսկ երկրորդի համար մինիմումի կետ է (նկ. 40):

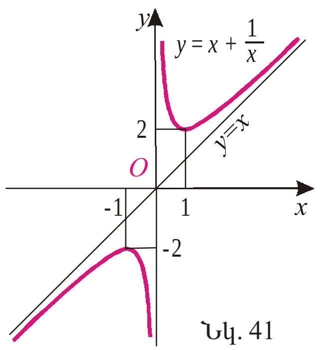


Նկ. 40

Օրինակ 5: Գտնենք $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը:

Գտնենք ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները.

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=0, \qquad f''(x)=\frac{2}{x^3}:$$



Նկ. 41

$f'(x)=0$ հավասարումից գտնում ենք կրիտիկական կետերը՝ $x=\pm1$:

Քանի որ $f''(-1)<0$ և $f''(1)>0$, հետևաբար 1-ը մաքսիմումի կետ է, իսկ 1-ը՝ մինիմումի: 41-րդ նկարում պատկերված է $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ուրվագիծը:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալը:
2. Ինչպե՞ս են գտնում $s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող նյութական կետի արագացումը:
3. Ինչպե՞ս են գտնում ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը՝ դրա երկրորդ կարգի ածանցյալի օգնությամբ:

Առաջադրանքներ

573. Գտնել ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալը.

ա) $f(x)=4x^3-x+\frac{1}{x}$, բ) $f(x)=x^2-\ln x$, գ) $f(x)=\sin 2x-\cos\frac{x}{2}$,

դ) $f(x)=\ln 3x-e^{2x}$, ե) $f(x)=x\sin x$, զ) $f(x)=e^x\cos x$:

574. Գտնել f ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալն x_0 կետում.

ա) $f(x)=7x+\ln x$, $x_0=0{,}2$, բ) $f(x)=x^4+\sin\pi x$, $x_0=1$, գ) $f(x)=x2^x$, $x_0=\log_2 e$, դ) $f(x)=e^x\left(x^2-4x\right)$, $x_0=\sqrt{6}$:

575. Գտնել $s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող նյութական կետի արագացումը.

ա) $s(t)=t^2-5t+4$, բ) $s(t)=-2t^2+t+15$, գ) $s(t)=t^4-5t^2-2t$,

դ) $s(t)=t^5-4t^3+t$, ե) $s(t)=\sin 2t$, զ) $s(t)=\cos 3t$,

է) $s(t)=e^t+e^{-t}$, ը) $s(t)=e^t-e^{-t}$:

576. Գտնել ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալն այն կետում, որում առաջին ածանցյալը զրո է.

ա) $f(x)=x-\ln x$, բ) $f(x)=e^x(x+1)$,

գ) $f(x)=e^{-x}(x+1)$, դ) $f(x)=x\ln x$:

577. Գտնել տրված $s(t)$ օրենքով ուղղագիծ շարժվող նյութական կետի արագության մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

ա) $s(t)=t^4-10t^3+36t^2+7t-4$, $t\in[0;3]$,

բ) $s(t)=t^4-6t^3+12t^2+9t$, $t\in[0;3]$:

➢ **578.** Երկու նյութական կետ ուղղագիծ շարժվում են, համապատասխանաբար, $s_1(t)=\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+6t+11$ և $s_2(t)=\frac{2}{3}t^3-t^2+5t+6$ օրենքներով, որտեղ ժամանակը չափվում է վայրկյաններով, իսկ ճանապարհը՝ մետրերով: Գտնել նյութական կետերի՝

ա) արագացումներն այն պահին, երբ նրանց արագությունները հավասար են,

բ) անցած ճանապարհներն այն պահին, երբ նրանց արագությունները հավասար են:

➢ **579.** Երկու նյութական կետ ուղղագիծ շարժվում են, համապատասխանաբար, $s_1(t)=t^3+6t^2+10$ և $s_2(t)=2t^3+9t$ օրենքներով, որտեղ ժամանակը չափվում է վայրկյաններով, իսկ ճանապարհը՝ մետրերով: Գտնել նյութական կետերի

ա) արագություններն այն պահին, երբ նրանց արագացումները հավասար են,

բ) անցած ճանապարհներն այն պահին, երբ նրանց արագությունները հավասար են:

Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումները (580-581).

580. ա) $f(x)=\ln x^2-\ln(2x-1)$, բ) $f(x)=e^x+e^{-2x}$,

գ) $f(x)=2(x-1)^4-(x-1)^2$, դ) $f(x)=3(x+1)^5-5(x+1)^3$:

➢ **581.** ա) $f(x)=x\ln^2 x-5x\ln x+7x$, բ) $f(x)=x\ln^2 x-4x\ln x+x$,

գ) $f(x)=e^x(x-1)^2+e^{-x}(x+1)^2$:

582. Ձևափոխելով $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցեք $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $f(x) = x^2 - 2x - 8$, բ) $f(x) = x^2 + 2x - 35$,

գ) $f(x) = \left|x^2 - x - 6\right|$, դ) $f(x) = \left|x^2 + 2x - 80\right|$ ։

583. Ձևափոխելով $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցեք $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, բ) $f(x) = \dfrac{2-x}{2x-3}$,

գ) $f(x) = 1 + \left|\dfrac{x}{x+1}\right|$, դ) $f(x) = 2 - \left|\dfrac{1}{x-3}\right|$ ։

Առաջադրանքներ կրկնության համար

Լուծել հավասարումը (584-592).

584. ա) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2x+5}$, բ) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5}=3^{5x-8}$,

գ) $5^{x+7}=(0{,}2)^{x+3}$, դ) $2^{3x-1}=(0{,}25)^{4x+6}$:

585. ա) $2^{x+3}+2^{x+1}=80$, բ) $5^{x+1}+5^{x-1}-5^{x}=105$:

586. ա) $5^{x+1}+3^{2x+3}=5^{x+2}-9\cdot 3^{2x}$, բ) $3^{3x}+9\cdot 2^{2x}=4^{x}+3^{2+3x}$:

587. ա) $4^{x}-3\cdot 2^{x+2}=64$, բ) $81^{x}+3^{3+2x}=90$:

➢**588.** ա) $18\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x}-35\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+12=0$, բ) $4^{\sqrt{x-3}}-\frac{9}{4}\cdot 2^{\sqrt{x-3}}+\frac{1}{2}=0$:

➢**589.** ա) $5^{x}-5^{3-x}=20$, բ) $3^{x+3}-3^{-x-1}-8=0$:

590. ա) $4^{x}+10^{x}-2\cdot 25^{x}=0$, բ) $7^{2x+1}+4\cdot 21^{x}-3^{2x+1}=0$:

➢**591.** ա) $9^{\frac{1}{x}}+6^{\frac{1}{x}}=6\cdot 4^{\frac{1}{x}}$, բ) $10^{\frac{2}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=4{,}25\cdot 50^{\frac{1}{x}}$:

* **592.** $\left|\frac{4}{3x-x^2}\right|^{x^2}=\left|\frac{4}{3x-x^2}\right|^{x}$, բ) $\left|\frac{2x-1}{3}\right|^{x+5\sqrt{-x}}=\left(\frac{2x-1}{3}\right)^{6}$:

* **593.** Գտնել հավասարման լուծումների քանակը՝ կախված a պարամետրից.

ա) $a\cdot 4^{x}-(a-3)\cdot 2^{x+1}+2a-14=0$,

բ) $a\cdot 9^{x}-(a+1)\cdot 3^{x+1}+2a+7=0$:

Լուծել անհավասարումը (594-599)

594. ա) $3^{x^2-2x}<27$, բ) $5^{x^2-2x-2}>5^{2x+3}$:

595. ա) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+x-3}\le\frac{8}{27}$, բ) $\left(\frac{2}{5}\right)^{4-x}<\left(\frac{5}{2}\right)^{2x+1}$:

596. ա) $2^{x+1}-4^{x}<1$, բ) $3\cdot 9^{x}\le 8\cdot 3^{x}+3$:

➢**597.** ա) $2^{2+x}-2^{2-x}\ge 15$, բ) $2^{x}-1<6\cdot 2^{-x}$:

➢**598.** ա) $\frac{1}{3^{x}+5}<\frac{1}{3^{x+1}-1}$, բ) $\frac{1}{2^{x}+3}\le\frac{1}{2^{x+2}-1}$:

➢**599.** ա) $5\cdot 2^{2x+1}-21\cdot 10^{x}>2\cdot 5^{2x+1}$, բ) $27\cdot 4^{x}-35\cdot 6^{x}+8\cdot 9^{x}\le 0$:

Գտնել արտահայտության արժեքը (600-602).

600. ա) $81^{0{,}5\log_9 7}+\log_{81}\sqrt{3}$, բ) $9^{\log_{25}5+\log_3\sqrt{5}}+3\log_4\frac{1}{\sqrt[3]{32}}$, գ) $\sqrt{10^{2+0,5\lg 16}}-\log_{0,5}\sqrt[5]{16}$,   դ) $\sqrt[6]{25^{-3\log_{\sqrt{5}}0,1}}+\log_{0,25}\sqrt{8}$:

601. ա) $16(\log_9 45-1)\cdot\log_{11}9\cdot\log_5 121$,   բ) $\left(30-5^{1+\log_5 4}\right)\cdot\log_2\sqrt{5}\cdot\log_5 4$:

➢**602.** ա) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{25}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$,   բ) $49^{0,5(\log_7 9-\log_7 6)}-16\cdot 5^{-\log_{\sqrt{5}}4}$:

Լուծել հավասարումը (603-613).

603. ա) $\log_3(2x+1)=-1$,   բ) $\log_2(5x-6)=6$:

604. ա) $\log_x(3x-2)=2$,   բ) $\log_x(4x-3)=2$:

605. ա) $\log_5^2 x+\frac{3}{2}\log_5 x-1=0$,   բ) $\lg^2 x-\lg x-2=0$:

606. ա) $(\lg x+4)(2-\lg x)=5$,   բ) $\frac{1}{5+\lg x}+\frac{2}{1-\lg x}=1$:

➢**607.** ա) $2\cdot\log_4 x+5\cdot\log_x 4=11$,   բ) $2\cdot\log_x 27-3\cdot\log_{27}x=1$:

608. ա) $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=3$,   բ) $\log_3(x+4)-\log_3(x-4)=2$:

➢**609.** ա) $\lg 2+\lg\left(4^{x-2}+9\right)=1+\lg\left(2^{x-2}+1\right)$,

բ) $\log_2\left(3^x-2\right)+\log_2\left(3^x-4\right)=\log_2\left(4\cdot 3^x-1\right)$:

➢**610.** ա) $x^{\lg x+1}=100$,   բ) $8\cdot x^{\log_8 x}=x^2$:

* **611.** ա) $4^{\log_4^2 x}+x^{\log_4 x}=8$,   բ) $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}=10$:

➢**612.** ա) $\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8\sqrt{x^2}=0$,   բ) $3\lg x^2-\lg^2(-x)=9$:

* **613.** ա) $\log_x\left(x^2+x\right)-\log_{x+1}x^2=2$,   բ) $\frac{4x}{9}=\left(\frac{9}{2}\right)^{\log_x 2}$:

Լուծել համակարգը (614-615).

➢**614.** ա) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4\end{cases}$,   բ) $\begin{cases}\lg(xy)=3\\ \lg x\cdot\lg y=2\end{cases}$:

* **615.** ա) $\begin{cases}x^{\log_5 y}+y^{\log_5 x}=50\\ \log_{25}x+\log_{25}y=1,5\end{cases}$,   բ) $\begin{cases}\lg x-5^y+2y=3\\ 2y\cdot 5^y+5^y\cdot\lg x=4\end{cases}$:

Լուծել անհավասարումը (616-624)

616. ա) $\log_{0,2}(2x-5)\geq 0$,   բ) $\log_3(2-x)\leq 1$:

617. ա) $\log_5\sqrt{x}-2\log_{25}x>2$,   բ) $\log_5\frac{x}{5}+\log_{\frac{1}{25}}x<1$:

618. ա) $\log_8\left(x^2-4x+3\right)<1$,   բ) $\lg\left(2x^2+4x+10\right)>\lg\left(x^2-4x+3\right)$:

619. ա) $\lg^2 x-2\lg x-8\le 0$, բ) $\log_2^2 x-8\log_2 x+12<0$:

620. ա) $\log_{0,5}^2 x+\log_{0,5} x-2\ge 0$, բ) $\log_{0,5}^2(3x-1)>\log_{0,5}(3x-1)+6$:

➤**621.** ա) $\dfrac{4}{\log_3 x+2}\le 1$, բ) $\dfrac{1}{\log_2(x+3)}\ge 3$:

➤**622.** ա) $\log_{0,5}(x+1)>\log_2(2-x)$, բ) $\log_2\left(\dfrac{4}{x+3}\right)>\log_2(2-x)$:

623. ա) $\log_{49}(x+3)-\log_7(x+2)<0$, բ) $\log_4(x+12)\ge\log_2 x$:

* **624.** ա) $\dfrac{1+\log_x(x-2)}{\log_5(2x+5)}<\log_x 5-\sqrt{\lg|\sin\pi x|}$,

բ) $\dfrac{2-\log_x(x-6)}{\log_{0,8}(2x-5)}\le\log_x 0,8-\sqrt[4]{\log_{\sqrt{2}}\cos^4\dfrac{\pi x}{3}}$:

Լուծել անհավասարումը և պարզել, թե պատկանու՞մ է արդյոք a թիվը դրա լուծումների բազմությանը. (625-626)

* **625.** $2^x+2^{1-x}\cdot\log_5 3\le\log_5 45$, ա) $a=\log_2\log_3 4$, բ) $a=\log_2\log_4 10$:

* **626.** $5^{-x}+5^x\cdot\log_3 5<\log_3 15$, ա) $a=\log_5\log_3 2$, բ) $a=\log_5\log_7 5$:

➤**627.** Օգտվելով համապատասխան սահմանումից՝ ձևակերպեք, թե ինչ է նշանակում՝

ա) a_n հաջորդականությունը չի ձգտում a-ի:

բ) f ֆունկցիան անընդհատ չէ x_0 կետում:

գ) f ֆունկցիան անընդհատ չէ:

դ) f ֆունկցիան ածանցելի չէ x_0 կետում:

ե) x_0 կետը f ֆունկցիայի կրիտիկական կետ չէ:

➤**628.** Գտեք ասույթի ճշմարտային արժեքը և ձևակերպեք ժխտումը.

ա) $[a,b]$ հատվածում որոշված կամայական անընդհատ ֆունկցիա ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

բ) $[a,b]$ հատվածում որոշված կամայական ֆունկցիա իր մեծագույն արժեքն ընդունում է հատվածի ծայրակետերում կամ մաքսիմումի կետում:

գ) $[a,b]$ հատվածում որոշված կամայական անընդհատ ֆունկցիա իր փոքրագույն արժեքն ընդունում է հատվածի ծայրակետերում կամ մինիմումի կետում:

դ) Գոյություն ունի $[a,b]$ հատվածում որոշված անընդհատ ֆունկցիա, որն այդ միջակայքում չի ընդունում 0 արժեքը և ունի տարբեր նշանի արժեքներ:

Ձևակերպեք ասույթի հակադարձը, հակադիրն ու հակադարձի հակադիրը և նշեք ճշմարտային արժեքները (629-630).

629. ա) Եթե $a>1$ և $b>0$, ապա $a^b>1$:

բ) Եթե $a>1$ և $b>1$, ապա $\log_a b>0$:

գ) Եթե $a>1$, ապա $y=a^x$ ֆունկցիան աճող է:

դ) Եթե $a>1$, ապա $y=\log_a x$ ֆունկցիան աճող է:

➢**630.** ա) Եթե ֆունկցիան ածանցելի է որևէ կետում, ապա անընդհատ է այդ կետում:

բ) Եթե ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում զրո է, ապա x_0 կետն այդ ֆունկցիայի կրիտիկական կետ է:

գ) Եթե ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում զրո է, ապա x_0 կետն այդ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է:

դ) Եթե $f'(x_0)=0,\quad f''(x_0)<0$, ապա x_0-ն մաքսիմումի կետ է:

* **631.** Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք, որ 1-ից մեծ կամայական բնական n-ի համար $\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ և $\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ թվերն իռացիոնալ են:

* **632.** Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք, որ կամայական բնական n-ի համար՝

ա) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$,

բ) $1+2q+3q^2+\dots+nq^{n-1}=\dfrac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$,

գ) $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\dots(1+q^{2^n})=\dfrac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$,

դ) $1^3+3^3+\dots+(2n+1)^3=(n+1)^2(2n^2+4n+1)$:

* **633.** Ապացուցել, որ եթե $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, ապա $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}=A$:

* **634.** Ապացուցել, որ եթե $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ և $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, ապա

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_na_1+b_{n-1}a_2+\dots+b_1a_n}{n}=AB:$$

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը (635-639).

635. ա) $y=x^3-7x^{15}+1$, բ) $y=x^{23}-23x^7+11x$:

636. ա) $y=\dfrac{x^2-1}{x+3}$, բ) $y=x^2-\dfrac{1}{x}$:

637. ա) $y=\sin 3x-2$, բ) $y=\operatorname{tg}2x+4$:

638. ա) $y=x^7+\ln x$, բ) $y=\cos x-\log_2 x$:

639. ա) $y=e^x\left(x^2-2x+2\right)$, բ) $y=2^x-4^{-x}$:

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը նշված կետում (640-645).

640. ա) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$, $x_0=1$, բ) $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+3}$, $x_0=1$:

641. ա) $f(x)=7\sin x+3\cos x-7$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$,

➢ բ) $f(x)=\sin^4\dfrac{x}{2}-\cos^4\dfrac{x}{2}+11$, $x_0=\dfrac{5\pi}{6}$:

642. ա) $f(x)=\left(x^2-2x+3\right)\sin 2x$, $x_0=0$,

բ) $f(x)=\left(x^2+3x+15\right)\cdot\operatorname{tg}x-5$, $x_0=0$:

➢**643.** ա) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{e^x}$, $x_0=0$, բ) $f(x)=\dfrac{e^x+3x}{\cos x}$, $x_0=0$:

➢**644.** ա) $f(x)=\dfrac{2\cdot 3^x}{\ln 3}-2x^2-3$, $x_0=2$, բ) $f(x)=2^{1-x}+3^{2-x}$, $x_0=-1$:

➢**645.** ա) $f(x)=x^2\ln x+\ln 3-5$, $x_0=1$, բ) $f(x)=\ln\left(6x-x^2\right)$, $x_0=1$:

➢**646.** Լուծել $f'(x)=\dfrac{f(0)}{x}$ հավասարումը, որտեղ $f(x)=\dfrac{-x-9}{6x-18}$:

* **647.** Լուծել հավասարումը.

$$xf'(x)=\frac{f(4)}{\sqrt{-0{,}125x^2+1{,}5x-3}},\ \text{որտեղ}\ f(x)=\sqrt{-0{,}125x^2+1{,}5x-3}:$$

648. Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետում տարված շոշափողի և աբսցիսների առանցքի կազմած անկյունը.

ա) $y=\dfrac{1}{2}x^2$, $x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, բ) $y=x^3+2x^2-6x$, $x_0=1$:

649. Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետերի աբսցիսները, որոնցում տարված շոշափողը զուգահեռ է նշված ուղղին.

ա) $f(x)=x^3+3x^2-5$, $y=24x+1$,

բ) $f(x)=2e^{-x}+1$, $y=-2x+4$:

Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետում տարված շոշափողի հավասարումը (650-653).

650. ա) $f(x)=x^2-5x+7, \quad x_0=2$, բ) $f(x)=2+x-x^2, \quad x_0=-1$:

651. ա) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}, \quad x_0=1$, բ) $f(x)=\sqrt{x}+1, \quad x_0=4$:

➢**652.** ա) $f(x)=3e^x+3e, \quad x_0=1$, բ) $f(x)=\dfrac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{2}, \quad x_0=2\ln 2$:

653. ա) $f(x)=\cos x, \quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$, բ) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}, \quad x_0=0$:

➢**654.** Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող ունեցող կետում տարված շոշափողով և կոորդինատային առանցքներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

ա) $f(x)=\dfrac{1-x^3}{x^2}, \quad x_0=-1$, բ) $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}, \quad x_0=1$:

* **655.** Ինչպիսի a-երի դեպքում $e^x=ax^6$ հավասարումն ունի մեկ դրական լուծում:

Գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը (656-658).

656. ա) $f(x)=x^3-3x^2+4$, բ) $f(x)=x^3+6x^2-15x-2$:

657. ա) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$, բ) $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$:

658. ա) $f(x)=9^{-x}+3^x$, բ) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$:

Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը (659-662).

659. ա) $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$, բ) $f(x)=(x-4)^2(x-1)$:

660. ա) $f(x)=8x-\dfrac{4}{x^2}$, բ) $f(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$:

661. ա) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, բ) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+10}{x-1}$:

➢**662.** ա) $f(x)=5^x+5^{2-x}$, բ) $f(x)=6x+e^{-6x}$:

Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները նշված միջակայքում (663-667).

663. ա) $f(x)=2x^3-3x^2-12x, \ [-2;1]$, բ) $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-5, \ [1;4]$:

664. ա) $f(x)=x^4-4x^2, \ [-3;3]$, բ) $f(x)=4x^4-2x^2-5, \ [0;2]$:

665. ա) $f(x)=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x}, \ [1;6]$, բ) $f(x)=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{x}{2}, \ [0;2{,}5]$:

➢**666.** ա) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+16}, \ [1;6]$, բ) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}, \ [1;9]$:

667. ա) $f(x)=x+\sin x, \ \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, բ) $f(x)=\sin 2x+2\cos x, \ \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$:

668. 26-ը ներկայացրեք երկու ոչ բացասական թվերի գումարով, այնպես, որ այդ թվերի արտադրյալը լինի մեծագույնը:

669. 18-ը ներկայացրեք երկու ոչ բացասական թվերի գումարով, այնպես, որ այդ թվերի քառակուսիների գումարը լինի փոքրագույնը:

➢**670.** 64-ը ներկայացնել երկու թվերի գումարով այնպես, որ նրանց քառակուսիների գումարը լինի փոքրագույնը:

➢**671.** Գտնել այն դրական թիվը, որի քառակուսու եռապատիկի և խորանարդի տարբերությունը մեծագույնն է:

➢**672.** Գտնել 2π լրիվ մակերևույթի մակերեսով մեծագույն ծավալ ունեցող գլանի բարձրությունն ու հիմքի շառավիղը:

➢**673.** Ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած է ուղղանկյուն, որի երկու գագաթները գտնվում են ներքնաձիգի վրա, մեկական էջերի վրա: Գտնել ուղղանկյան մակերեսի մեծագույն արժեքը, եթե եռանկյան ներքնաձիգը 8 է, իսկ սուր անկյուններից մեկը՝ 60°:

➢**674.** R շառավղով գնդին ներգծած է մեծագույն կողմնային մակերևույթով գլան: Գտնել գլանի ծավալը:

* **675.** գտեք R շառավղով գնդին ներգծած մեծագույն ծավալով կոնի հիմքի շառավիղը:

* **676.** Գտնել $(3;3)$ կետի և $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին պատկանող կետերի միջև հեռավորության փոքրագույն արժեքը:

***677.** Ինչպիսի՞ ամենամեծ մակերես կարող է ունենալ ուղղանկյունը, որի երկու գագաթները աբսցիսների առանցքի վրա են, իսկ մյուս երկուսը պատկանում են $y=-x^2+8x-7$, $x\in[1;7]$, ֆունկցիայի գրաֆիկին:

***678.** Ինչպիսի՞ ամենամեծ մակերես կարող է ունենալ ուղղանկյունը, որի երկու գագաթները աբսցիսների առանցքի վրա են, իսկ մյուս երկուսը պատկանում են $y=x^2-6x$, $x\in[0;6]$, ֆունկցիայի գրաֆիկին:

* **679.** A անկյան կողմերի վրա E և F կետերն ընտրված են այնպես, որ AEF եռանկյունն ունի S մակերես: Ինչպիսի՞ փոքրագույն արժեք կարող է ունենալ EF հատվածի երկարությունը, եթե $\angle A=60^\circ$:

1.ա) $f(7)<f(8)$ բ) $f(0,3)<f(0,4)$ գ) $f(-24)>f(-23)$ դ) $f(-5,5)>f(-5,4)$ ե) $f(-52)=f(52)$ զ) $f(-7,3)<f(8)$ 2. ա) $f(13)>f(12)$ բ) $f(0,02)>f(0,01)$ գ) $f(-4)>f(-10)$ դ) $f(-9,4)>f(-9,5)$ ե) $f(-73)<f(73)$ զ) $f(-5,9)<f(6)$ 3. ա) $(3,4)^2$, $(3,4)^3$, $(3,4)^5$ բ) $(0,7)^9$, $(0,7)^4$, $0,7$ գ) $(2/5)^7$, $(2/5)^5$, $(2/5)^4$ դ) $9/8$, $(9/8)^4$, $(9/8)^7$ 4.ա) q^k բ) q^k 6.ա) 2 բ) 0 գ) 1 դ) 1 ե) 1 զ) 2 7. ա) $(0;\infty)$ բ) $(-\infty;0]$ գ) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ դ) $\{0\}$ ե) $(-\infty;\infty)$ զ) $(-\infty;\infty)$ է) $\varnothing$ ը) $(-2;\infty)$ թ) $(-\infty;-5]$ 8. ա) -1, 1 բ) 3 գ) -7, 7 դ) 0 ե) -1, 0, 1 զ) -1, 0, 1 9.ա) $(-2;2)$ բ) $(-\infty;-0,5)\cup(0,5;\infty)$ գ) $(0,5;\infty)$ դ) $(-\infty;1]$ ե) $[-0,75;0,75]$ զ) $(-\infty;-2,5)\cup(2,5;\infty)$ 10. ա) $(-\infty;7)$ բ) $[-9;9]$ գ) $(-\infty;-7)\cup(7;\infty)$ դ) $(-\infty;7)$ ե) $[1;3]$ զ) $(-4;2)$ 13. ա) $a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{1/3}$ բ) $a-a^{1/2}b^{1/2}+b$ գ) $x^{1/3}-2$ դ) $a^{1/2}$ 14. ա) $f(15)>f(14)$ բ) $f(5,3)<f(5,4)$ գ) $f(0)<f(8,3)$ 15. ա) $f(9)>f(7)$ բ) $f(7,09)<f(7,1)$ գ) $f(-22)<f(-20)$ դ) $f(-3,2)<f(-3,1)$ ե) $f(-23)<f(23)$ զ) $f(-8,1)<f(6,2)$ 16. ա) $[0;\infty)$ բ) $(-\infty;\infty)$ գ) $[0;\infty)$ դ) $[0;\infty)$ 17. ա) $(3;\infty)$ բ) $(-\infty 2)\cup(2;\infty)$ գ) $(-\infty;0,5)\cup(0,5;1)\cup(0,5;\infty)$ դ) $(-\infty;1)\cup(1;4)\cup(4;\infty)$ 19. ա) 1 բ) 0 գ) 0 դ) 1 ե) 0 զ) 1 20. ա) 2 բ) 0 գ) 2 21. ա) 49 բ) 16 գ) 125 դ) -27 ե) 512 զ) 10000 22. 21 23. 19 24. Գինն իջավ 4%-ով 25. Գինն իջավ 4%-ով 26. ա) $(0;\infty)$ բ) $(0;\infty)$ գ) $(-\infty;0)$ դ) $(-4;\infty)$ ե) $(-\infty;5)$ զ) $(-\infty;1)$ 27. ա) $\uparrow$, երբ $a>1$, $\downarrow$, երբ $0<a<1$ բ) $\uparrow$, երբ $a>2$, $\downarrow$, երբ $1<a<2$ գ) $\uparrow$, երբ $a>-1$, $\downarrow$, երբ $-1,5<a<-1$ դ) $\uparrow$, երբ $a\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$, $\downarrow$, երբ $a\in(-1;0)\cup(0;1)$ 28. ա) 1 բ) 1 գ) 0 դ) 0 ե) 1 զ) 1 29. ա) 1100000 բ) 210000 գ) k տարի հետո գումարը կլինի $1000000\cdot(1,1)^k$ դ) 4 30.ա) 80 գ բ) 36 գ գ) k տարի հետո քարակտորի զանգվածը կլինի $80\cdot(0,8)^k$ գ դ) 4 31. ա) $[1;\infty)$, մեծագույն արժեք չունի, փոքրագույնը՝ 1 բ) $(0;1]$, մեծագույնը՝ 1, փոքրագույն արժեք չունի գ) $[0;8/3]$, մեծագույնը՝ $8/3$, փոքրագույնը՝ 0 33.ա) $3\cdot 243^x$ բ) $18\cdot 48^x$ գ) $1,25\cdot 50^x$ դ) $40,5\cdot 288^x$ ե) $3\cdot 81^x$ զ) $25\cdot 125^x$ 34. ա) $(-3;3)$ բ) $(-\infty;-3)\cup(7;\infty)$ գ) $(-\infty;2/3)\cup(1;\infty)$ 35. ա) $(-\sqrt{17}/2;-2)\cup(2;\sqrt{17}/2)$ բ) $(-1/6;0)\cup(5/6;1)$ գ) $(2;2,25)\cup(2,25;2,5)$ 36.ա) 47 բ) 7 գ) 23 37. ա) 18 բ) 76 գ) 527 38. 1) a^d 2) a^d 3) a^d 4) ա) աճող է բ) նվազող է գ) նվազող է դ) աճող է 40. ա) $1/3$ բ) $-0,4$ գ) $0,75$ դ) $-1/6$ 41. ա) 5 բ) -1 գ) $-0,5$ դ) -2 ե) 4 զ) $-1/3$ 42. ա) 2 բ) 0 գ) 11 դ) 12 ե) -1 զ) 3,5 43. ա) + բ) − գ) − դ) − 44. ա) − բ) − գ) − դ) + 45. ա) 5 բ) 1 գ) 6 դ) $5/3$ ե) -1, 5 զ) -2, $2/3$ 46. ա) -4 բ) 3 գ) 1 դ) -2, 1 47. ա) 2 բ) 3 գ) 3 դ) -2 48. ա) 1 բ) -5 գ) -1 դ) -1 ե) 3 զ) 3,5 49. ա) 1 բ) 1 գ) 2 դ) -2 ե) -3 զ) 2 50. ա) 3 բ) $-0,5$ գ) 3 դ) 3 51. ա) 13 բ) 2 գ) 3 դ) 13 ե) 3 զ) 3 52. ա) 4 բ) 1 գ) -1 դ) -3 53. ա) 6 բ) 1 գ) 1 դ) 1 54. ա) 0 բ) 1 գ) -4 դ) -4 55. ա) -2, 2 բ) 2 գ) -1 դ) -2 56. ա) 1, 1,8, 4 բ) ±1, $\pm\sqrt{6}$, ±2 58. ա) 1 բ) 2 59. ա) $(1,6;\infty)$ բ) $(-1,5;\infty)$ գ) $(0;1)$ 60. ա) $(1;6)$ բ) $[6;10)$ 61. ա) $(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$ բ) $(-1;1,5)\cup(1,5;4)$ 62.ա) $(1/3;5/3)\cup(5/3;3)$ բ) $(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$ 63. ա) $(-\infty;0,5]$ բ) $(-2;-3/7]$ գ) $[-7;-5/3)\cup(2;\infty)$ 64.ա) $(-\infty;4/13]\cup[1;\infty)$ բ) $(-3;\infty)$ գ) $(-\infty;-1)\cup(-1;0,2)$ 65.ա) $(-\infty;4)$ բ) $[-1;\infty)$ գ) $(-3;\infty)$ դ) $(-\infty;-3]$ ե) $(-2;\infty)$ զ) $[-3;\infty)$ է) $(-\infty;-2)$ ը) $[-6;\infty)$ թ) $(-\infty;-6)$

66. ա) $(-\infty;3)$ **բ)** $(-1;\infty)$ **գ)** $[-4;\infty)$ **դ)** $(-\infty;1)$ **ե)** $\varnothing$ **զ)** $\varnothing$ **67. ա)** $(-\infty;2)$ **բ)** $[36/7;\infty)$ **գ)** $[10;\infty)$ **դ)** $(-\infty;3)$ **ե)** $(8;\infty)$ **զ)** $[0;36)$ **68. ա)** $(-\infty;-4/3)\cup(1;\infty)$ **բ)** $(-\infty;-2,5]\cup[1;\infty)$ **գ)** $[0;1,2]$ **դ)** $(-\infty;-12)\cup(-2;\infty)$ **ե)** $\varnothing$ **զ)** $(-\infty;-5)\cup(5;\infty)$ **69.ա)** $[1;\infty)$ **բ)** $(-\infty;3)$ **գ)** $(-1;\infty)$ **դ)** $[2;\infty)$ **ե)** $[-3;\infty)$ **զ)** $(1;\infty)$ **է)** $(-4;\infty)$ **ը)** $(-\infty;8)$ **70.ա)** $(-1,5;3)$ **բ)** $(-\infty;1]\cup[2;\infty)$ **գ)** $[0;16)$ **դ)** $[0;9]$ **71. ա)** $[2;\infty)$ **բ)** $(-2;\infty)$ **գ)** $(-\infty;-1]$ **դ)** $(-\infty;-3)$ **72. ա)** $(2;\infty)$ **բ)** $[2;\infty)$ **գ)** $(3;\infty)$ **դ)** $(-\infty;2)$ **73. ա)** $(6;\infty)$ **բ)** $[-9;\infty)$ **գ)** $(-2;\infty)$ **դ)** $(-\infty;6]$ **74. ա)** $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$ **բ)** $(-2;4)$ **գ)** $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$ **դ)** $[3;5]$ **75. ա)** $(-\infty;-4]\cup[4;\infty)$ **բ)** $(-\infty;-2)$ **գ)** $(-\infty;-1)$ **դ)** $[-4;0)\cup(0;4]$ **76. ա)** $(-\infty;1]$ **բ)** $[0;\infty)$ **գ)** $(-1;2)$ **դ)** $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$ **77. ա)** $(2;4)$ **բ)** $(-\infty;-2]\cup[0;\infty)$ **78. ա)** $(2/3;\infty)$ **բ)** $(-\infty;1,5)$ **79. ա)** $(-4;1)\cup(4;6)$ **բ)** $[-0,2;1]\cup[3;5]$ **80.** 2ժ **81.** 4ժ **82.** 6կմ **83. ա)** 4 **բ)** 4 **գ)** −3 **դ)** −3 **ե)** −2 **զ)** 4 **84. ա)** 0,4 **բ)** 1,5 **գ)** 7/3 **դ)** −2,5 **ե)** 0,5 **զ)** −7/6 **85.ա)** 144 **բ)** 81 **գ)** 4 **դ)** 64 **ե)** 121 **զ)** 16 **86.ա)** 1,5 **բ)** 1,5 **գ)** −1,5 **դ)** 0,75 **ե)** −5/3 **զ)** 1,5 **87.ա)** $\log_8 5$ **բ)** $\log_{0,5} 3$ **գ)** $-\lg 6$ **դ)** $\log_2 9-1$ **ե)** $0,5\cdot\log_7 13+0,5$ **զ)** $3-\lg 7$ **88.ա)** 6 **բ)** 0,2 **գ)** 25 **դ)** 5 **ե)** ±5 **զ)** ±0,25 **89. ա)** $(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$ **բ)** $(-1;1)$ **գ)** $(-\infty;-3)\cup(2;\infty)$ **դ)** $(0;1)\cup$ $\cup(1;2)$ **ե)** $(2;2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2};3)$ **զ)** $(0,5;1)\cup(1;5)$ **90.ա)** **R**, $[-1,5;1,5]$, մեծագույնը՝ 1,5, փոքրագույնը՝ −1,5 **բ)** **R**, $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$, մեծագույնը՝ $\sqrt{2}$, փոքրագույնը՝ $-\sqrt{2}$ **գ)** **R**, $[-2;2]$, մեծագույնը՝ 2, փոքրագույնը՝ −2 **դ)** **R**, $[-5;5]$, մեծագույնը՝ 5, փոքրագույնը՝ −5 **91. ա)** $(-\infty;1,75]$ **բ)** $[15/7;13/5]$ **գ)** $[0;3]$ **դ)** $[-4;4]$ **92. ա)** 2 **բ)** −2 **գ)** 3 **դ)** 2 **ե)** −3 **զ)** 2 **93. ա)** 1,5 **բ)** 4/3 **գ)** −2 **դ)** 2 **94. ա)** 2 **բ)** 0,5 **95. ա)** 0,5 **բ)** 2 **գ)** 1,125 **դ)** 4/3 **96. ա)** $2+$ $+1,5\cdot\lg a+\lg b+0,5\cdot\lg c$ **բ)** $-3+4\lg a-1,5\cdot\lg b+2\lg c$ **գ)** $3+2\lg a+0,5\cdot\lg b-3\lg c$ **դ)** $1+$ $+5\lg a-0,5\cdot\lg b-2\lg c$ **ե)** $-2+7\lg b/3-0,5\cdot\lg c$ **զ)** $-1-2\lg a+3\lg b/7-3\lg c$ **99. ա)** −2 **բ)** −2 **գ)** 1 **դ)** 2 **100. ա)** 2 **բ)** 12 **գ)** 3 **101. ա)** 0,4 **բ)** 2/3 **գ)** 100 **դ)** 24 **ե)** 7/3 **զ)** 576 **102. ա)** 24 **բ)** 890 **գ)** 125 **դ)** 0,1 **105. ա)** $x+1$ **բ)** $a+b$ **գ)** 1 **106. ա)** 2 **բ)** 5 **գ)** 1 **դ)** −0,25 **ե)** 3 **զ)** 1 **107.ա)** $x>0$ **բ)** $x<0$ **գ)** $x\neq 0$ **դ)** $x>0$ **108.ա)** $x>0$, $y>0$ **բ)** $x<0$, $y<0$ **գ)** $x>0$, $y<0$ **109. ա)** $\lg q$ **բ)** $\lg q$ **111. ա)** 41 **բ)** 44/9 **գ)** −22 **112. ա)** 27 **բ)** −5, 5 **գ)** −15 **113. ա)** $(1,2;\infty)$ **բ)** $(-\infty;2)$ **գ)** $(-\infty;-\sqrt{7})\cup(\sqrt{7};\infty)$ **դ)** $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ **ե)** $(-2,5;1)$ **զ)** $(0,5;3)$ **է)** $[0;1)$ **ը)** $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ **թ)** $(-\infty;-5)\cup(5;\infty)$ **114. ա)** $\log_3 7>\log_3 5$ **բ)** $\lg 0,7<\lg 0,71$ **գ)** $\log_{1/3} 6<\log_{1/3} 4$ **դ)** $\log_{5/6} 3/4>\log_{5/6} 4/5$ **ե)** $\log_5 3<\log_5 10/3$ **զ)** $\lg(\sqrt{5}/2)<\lg(\sqrt{6}/2)$ **115. ա)** $\log_{0,4}\sqrt{3}<0$ **բ)** $\log_4\sqrt[3]{3}>0$ **գ)** $\log_{\sqrt{3}} 2>1$ **դ)** $\log_{\sqrt{3}/3} 2/3<1$ **ե)** $3\log_{2/5} 2<\log_{2/5} 7$ **զ)** $3\lg 5<7\lg 2$ **117. ա)** $\uparrow$ **բ)** $\downarrow$ **գ)** $\uparrow$ **118. ա)** $\uparrow$, երբ $a>1$, $\downarrow$, երբ $0<a<1$ **բ)** $\uparrow$, երբ $a>2$, $\downarrow$, երբ $1<a<2$ **գ)** $\uparrow$, երբ $a<2$, $\downarrow$, երբ $2<a<2,5$ **119. ա)** + **բ)** − **գ)** + **դ)** − **120. ա)** $(2;3)$-ում՝ բացասական, $(3;\infty)$-ում՝ դրական **բ)** $(1,5;2)$-ում՝ դրական, $(2;\infty)$-ում՝ բացասական **գ)** $(-\infty;-2)$-ում և $(2;\infty)$-ում ՝ դրական, $(-2;-\sqrt{3})$-ում և $(\sqrt{3};2)$-ում ՝ բացասական **դ)** $(-\infty;-\sqrt{10})$-ում և $(\sqrt{10};\infty)$-ում ՝ բացասական, $(-\sqrt{10};-3)$-ում և $(3;\sqrt{10})$-ում՝ դրական **ե)** $(-\infty;-4)$-ում և $(4;\infty)$-ում ՝ բացասական, $(-4;-3)$-ում և $(3;4)$-ում՝ դրական **զ)** $(-\infty;-2)$-ում և $(2;\infty)$-ում ՝ դրական, $(-2;-1)$-ում և $(1;2)$-ում ՝ բացասական **122. ա)** $[2;\infty)$, 2 **բ)** $[0;\infty)$, 0 **գ)** $[-1;\infty)$, −1 **123. ա)** $(-\infty;-1]$, −1 **բ)** $(-\infty;1]$, 1 **գ)** $(-\infty;1]$, 1 **124. ա)** $(1;2)\cup(2;5)$ **բ)** $(-3;1)\cup(1;2)$ **գ)** $(2;\infty)$ **դ)** $(-4;2)\cup(2;3)$ **ե)** $(0;1)\cup(1;7)$ **զ)** $(4;5)\cup\cup(5;\infty)$ **է)** $(2;3)\cup(3;7)$ **ը)** $(-\infty;-1)\cup(1;3,5)\cup(3,5;4)$ **թ)** $(0;1)\cup(1;2)$ **130. ա)** 26 **բ)** 3,55 **գ)** 3 **դ)** 3 **131. ա)** -2, 4 **բ)** -1, $-1/7$ **գ)** -13, 6 **դ)** $-10/3$, 2 **132.ա)** 11 **բ)** 47,5 **գ)** 20 **դ)** 37,4 **133.ա)** $\varnothing$ **բ)** 5 **գ)** 0 **դ)** $(\sqrt{41}-3)/2$, 2 **134. ա)** 0 **բ)** $\sqrt{2}$ **գ)** 6 **դ)** 2 **135. ա)** 1, 9 **բ)** 5 **գ)** 2 **136. ա)** 0,01, 1000 **բ)** 101, 1001 **գ)** 0,25, 0,5 **դ)** 100, 10^8 **137. ա)** 1/3, 27 **բ)** 11 **գ)** 1/6, $6^{7/3}$ **դ)** 2 **138. ա)** 10, $10^{-3,5}$ **բ)** 10, $10^{-1,4}$ **գ)** 9, $3^{-11/6}$ **դ)** 0,25, 8 **139. ա)** $5^{-0,5}$, $5^{1/3}$ **բ)** 1,001, $1+10\sqrt{10}$ **գ)** $-0,5$, -8 **դ)** 102 **140. ա)** 5 **բ)** 4 **գ)** 81 **դ)** 8 **141. ա)** $(\log_3 5-2)/4$ **բ)** $(\lg 2-3)/2$ **գ)** $(\log_4 6+1)/5$ **դ)** $(\log_2 7+5)/10$ **ե)** $-(11+\lg 3)/8$ **զ)** $(4+\log_5 9)/3$ **142. ա)** 81, 1/3 **բ)** 100, 0,1 **գ)** 8, $\sqrt{2}/16$ **դ)** 64, 2 **ե)** 125, 0,2 **զ)** 81, 1/3 **143. ա)** 10, $10^{\log_5 7}$ **բ)** 0,25, $2^{\log_3 5}$ **144. ա)** 4, 6 **բ)** 3 **գ)** 2, 3 **դ)** 64 **145. ա)** 0 **բ)** -1, 2 **գ)** 0, 2 **146. ա)** 0,2, 5 **բ)** $2^{\pm\sqrt{10}}$ **147. ա)** $(2,5;3)$ **բ)** $(-\infty;4)\cup(7;\infty)$ **148. ա)** $(-3;2,25)$ **բ)** $(2/9;2/3)$ **149. ա)** $(2;32)$, $(32;2)$ **բ)** $(8;0,25)$ **գ)** $(7;9)$, $(9;7)$ **դ)** $(15;10)$ **150. ա)** $(2;6)$ **բ)** $(9;6)$ **գ)** $(5;6)$, $(-3;-10)$ **դ)** $(-3,75;1,25)$ **154. ա)** $[13;\infty)$ **բ)** $(5/2;23/9)$ **գ)** $(5;5,04]$ **դ)** $[31;\infty)$ **ե)** $(-1;6)$ **զ)** $(8;8,2)$ **է)** $(7/3;\infty)$ **ը)** $[-1,75;\infty)$ **թ)** $(1,5;19/12]$ **155. ա)** $\left(-8;-(7+\sqrt{69})/2\right)\cup\left((\sqrt{69}-7)/2;1\right)$ **բ)** $(-\infty;-4]\cup[2;\infty)$ **գ)** $(-\infty;-316/63)\cup(-4;\infty)$ **դ)** $(1/3;1,5)$ **156.ա)** $(-3;11/3)$ **բ)** $(-5/7;25/7)$ **գ)** $(0;4/3)\cup(8/3;4)$ **դ)** $[-5;-1)\cup(4;8]$ **157.ա)** $[2;\infty)$ **բ)** $(5;\infty)$ **գ)** $(2;\infty)$ **դ)** $[5;\infty)$ **158.ա)** $(4;\infty)$ **բ)** $(4;5]$ **գ)** $(0;2,5)\cup(4;6,5)$ **դ)** $[0;\infty)$ **159. ա)** $(0;2^{-1,25})\cup(2;\infty)$ **բ)** $[6;36]$ **գ)** $(0,1;100)\cup\cup(10^3;10^5)$ **դ)** $(0;1/16)\cup\left[2^{-2\sqrt{2}};2^{2\sqrt{2}}\right]$ **160. ա)** $(1;5)$ **բ)** $(5/3;53/30]$ **գ)** $[-9;-3)$ **դ)** $(0;130)$ **161. ա)** $(0;0,125)\cup(4;\infty)$ **բ)** $[1/27;3]$ **գ)** $(0,1;100)$ **դ)** $[5;25]$ **162. ա)** $(\log_3 80;4]$ **բ)** $(0,5;\infty)$ **գ)** $(2+\log_3 2;3)$ **դ)** $(1;2]$ **163. ա)** $(8;12)$ **բ)** $[6;9]$ **164. ա)** $(5/3;2)$ **բ)** $(3,5;4)$ **գ)** $(1;\infty)$ **դ)** $(0;1)$ **165. ա)** $(0,4;0,5]\cup(1;2]$ **բ)** $(1/3;1)\cup(3;\infty)$ **166. ա)** $[-6;-3)\cup(1;4]$ **բ)** $(-7;-167/24)\cup\cup(61/8;23/3)$ **167. ա)** 1/3 **բ)** 4/33 **գ)** 38/9 **դ)** 41/30 **ե)** 497/198 **168.** $-0,5$ **169**[1]**. ա)** Կ **բ)** Կ **գ)** Կ **դ)** Կ **ե)** Կ **զ)** Կ **170. ա)** Ճ **բ)** Կ **գ)** Ճ **դ)** Կ **171. ա)** Կ **բ)** Կ **գ)** Ճ **դ)** Ճ **ե)** Ճ **զ)** Ճ **է)** Ճ **172.** Ասույթ է գ)-ն **173. ա)** $5\ge 2$, Ճ, $5>2$ և $5=2$, Կ **բ)** $3\ge 3$, Ճ, $3>3$ և $3=3$, Կ **գ)** $7\le 9$, Ճ, $7<9$ և $7=9$, Կ **դ)** $8\le 8$, Ճ, $8<8$ և $8=8$, Կ **174. ա)** Ճ **բ)** Կ **175. ա)** $x\ge 1$ **բ)** $x\le 5$ **գ)** $|x|>7$ **դ)** $|x|<4$ **ե)** $x\le 19$ **զ)** $x\ge 21$ **177. ա)** AB, BC, AC կողմերից որևէ երկուսը հավասար չեն **բ)** AB, BC, AC կողմերից կամայական երկուսն իրար հավասար չեն **գ)**հանդիպակած կողմերից որևէ երկուսը զուգահեռ չեն **դ)** հանդիպակած կողմերից կամայական երկուսը զուգահեռ չեն **178. ա)** Դահլիճում կա դուռ, որ փայտից չէ **բ)** գոյություն ունի բակ, որում մեքենա կանգնած չէ **գ)** բոլոր ծաղիկները գարնանը ծաղկում են **դ)** կամայական ծաղիկ աշնանը ծաղկում է **183.** բ) **184.** դ) **185. ա)** Կամայական երկրում գոյություն ունի քաղաք, որի կամայական դպրոցում կա չվերանորոգված դասարան **բ)** գոյություն ունի քաղաք, որի կամայական այգում գոյություն ունի ծառ, որի վրա չորացած ճյուղ չկա **186. ա)** $\exists x\in\mathbf{R}\left(f(-x)\ne f(x)\right)$ **բ)** $\exists x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\left(f(-x)\ne -f(x)\right)$ **գ)** $\exists x\in\mathbf{R}\left(f(x+T)\ne f(x)\right)$ **դ)** $\forall T\ne 0\left(\exists x\in\mathbf{R}\left(f(x+T)\ne f(x)\right)\right)$ **188. ա)** Կ **բ)** Ճ **գ)** Կ **դ)** Կ **194. ա)** Ճ **բ)** Կ **գ)** Կ **դ)** Կ **ե)** Կ **զ)** Ճ, փոխհակադարձ են. ա)-ն և դ)-ն, բ)-ն և գ)-ն, փոխհա-

---

[1] 3-րդ գլխի պատասխաններում «Ճ» տառը նշանակում է «ճշմարիտ է», իսկ «Կ» տառը՝ «կեղծ է»

կաղիր են. ա)-ն և բ)-ն, դ)-ն և զ)-ն **195. ա)** ճ **բ)** կ **գ)** կ **դ)** ճ **ե)** ճ **զ)** կ, փոխհակադարձ են. ա)-ն և գ)-ն, բ)-ն և ե)-ն, փոխհակադիր են. ա)-ն և բ)-ն, գ)-ն և ե)-ն **196. ա)** $\Leftrightarrow$ **բ)** $\Leftrightarrow$ **գ)** $\Leftarrow$ **դ)** $\Rightarrow$ **197.ա)** $\Rightarrow$ **բ)** $\Leftrightarrow$ **գ)** $\Rightarrow$ **դ)** $\Leftrightarrow$ **198.ա)** $\Leftarrow$ **բ)** $\Rightarrow$ **գ)** $\Leftrightarrow$ **դ)** $\Leftrightarrow$ **199.ա)** $\Rightarrow$ **բ)** $\Rightarrow$ **գ)** $\Leftarrow$ **200.)** $\Leftarrow$ **բ)** $\Leftarrow$ **գ)** $\Leftrightarrow$ **դ)** $\Rightarrow$ **201.** Օրինակ՝ **ա)** $a>b>0$ **բ)** $0<x<\pi$ **գ)** $a>1$, $b>1$ **դ)** $x=1$ **202.** Օրինակ՝ **ա)** $ac>0$ **բ)** $a<0$ **203. ա)** Այդ զագաթին կից կողմերը լինեն իրար հավասար **բ)** այդ եռանկյան որևէ երկու կողմեր իրար հավասար են **204. ա)** Նրա հանդիկակաց անկյունների գումարը լինի 180° **բ)** նրա հանդիկակաց կողմերի գումարները հավասար են **205.ա)** Նրա D տարբերիչը լինի դրական **բ)** $a>0$, $D<0$ **206.ա)** Գոյություն ունեն $x_1,x_2\in\mathbf{R}$, այնպես որ $x_1<x_2$ և $f(x_1)\geq f(x_2)$ **բ)** գոյություն ունեն $x_1,x_2\in\mathbf{R}$, այնպես որ $x_1<x_2$ և $f(x_1)\leq f(x_2)$ **գ)** գոյություն ունեն $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbf{R}$, այնպես որ $x_1<x_2$, $f(x_1)\geq\ \geq f(x_2)$, $x_3<x_4$ և $f(x_3)\leq f(x_4)$ **207.** 20 սմ **208.** 21սմ **209. ա)** Հավասարասրուն սեղանին կարելի է արտագծել շրջանագիծ, բխեցման կանոն **բ)** եթե հավասարասրուն սեղանին կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ապա նրա հիմքերի գումարը հավասար է սրունքների գումարին, բխեցման կանոն **գ)** եթե կետը հավասարահեռ է եռանկյան գագաթներից, ապա այն միջնուղղահայացների հատման կետն է, բխեցման կանոն **210. ա)** գոյություն չունի α, որ $\sin\alpha\cos\alpha=0{,}7$, հակադրության կանոն **բ)** $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\neq1{,}42$, հակադրության կանոն **գ)** $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\operatorname{ctg}\alpha=3\Rightarrow\ \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha==6$, հակադրության կանոն **211. ա)** $AD=BC$, փաստը կիրառելու կանոն **բ)** AOC-ն հավասարասրուն եռանկյուն է, փաստը կիրառելու կանոն **212. ա)** A-ն և B-ն հակադիր անկյուններ են, փաստը կիրառելու կանոն **բ)** A-ն և B-ն կից անկյուններ են, փաստը կիրառելու կանոն **213. ա)** հակադիր անկյունները հավասար են, փաստը կիրառելու կանոն **բ)**կից անկյունների գումարը 180° է, փաստը կիրառելու կանոն **214.ա)** բացասական թվի մոդուլը դրական է, լրիվ ինդուկցիա **բ)** եթե $a<0$, ապա $\dfrac{a+|a|}{2}=\dfrac{a-a}{2}=0=\max\{a,0\}$, լրիվ ինդուկցիա **215.** հատվում են, բացառման կանոն **217. ա)** զույգ է **բ)** կենտ է **գ)** կենտ է **դ)** զույգ է **223. ա)** 18 **բ)** -6 **գ)** -5, -4, -3 **դ)** 3 **224. ա)** n^2 **բ)** $n/(n+1)$ **գ)** $0{,}75-0{,}5\times\times(1/(2n-2)+1/(2n-1))$, երբ $n=2k-1$, $0{,}75-0{,}5\cdot(1/2n+1/2n-1)$, երբ $n=2k$ **225.** $n(n-1)/2$ **227. ա)** 25 **բ)** 6 **գ)** 4 **դ)** այո **ե)** այո **229.ա)** π **բ)** π **գ)** π **դ)** π **236.ա)** 4 **բ)** 8 կամ 12 **գ)** 4 **246.**Կիրակոսը **247.** 1977 **248.** 50 **254. ա)** 26 **բ)** 161 **գ)** $4n^2-2$ **դ)** 9 **ե)** $2m^2-2k^2$ **զ)** $4m+2$ **255. ա)** 6 **բ)** -20 **գ)** 257/85 **դ)** 4,5 **256.ա)** $2n$ **բ)** $2n-1$ **գ)** n^2 **դ)** 2^n **ե)** $(-1)^{n+1}$ **զ)** $a_n=8$, $n\in\mathbf{N}$ **257.ա)** $5n-2$ **բ)** 3^{n-1} **գ)** $20-2n$ **դ)** $1350\cdot5^{-n}$ **259.ա)** Այո **բ)** ոչ **գ)** ոչ **դ)** այո **ե)** այո **զ)** այո **261.ա)** Այո **բ)** ոչ **գ)** այո **դ)** ոչ **ե)** այո **զ)** այո **263. ա)** $bc-ad<0$ և $-d/c<1$ **բ)** $bc-ad>0$ և $-d/c<1$ **266. ա)** 6 **բ)** 47 **գ)** 7 **267. ա)** 16 **բ)** 1 **գ)** 0 **268. ա)** $3-n-i(n-2)$ **բ)** $(1-i)\cdot i^{n-1}$ **270. ա)** 2 **բ)** 1 **գ)** 1 **271.** 110 **272.** 5,6 **284. ա)** $n!$ **բ)** $(n-1)!$ **գ)** $n(n+1)$ **դ)** $2n^2$ **285. ա)** $3n$ **բ)** 3^n **293. ա)** 3 **բ)** 7 **294. ա)** 9 **բ)** 10, 0,0001 **308.ա)** 2^{n-2}, $n>1$ **բ)** $a_n=(1{,}5)^{n-1}$, $n>1$ **գ)** 3^{n-1}, $n>1$ **դ)** $a_n=1$, $n\geq1$ **ե)** $a_n=0{,}5$, $n>1$ **զ)** $a_n=2^{n-2}/n$, $n>1$ **է)** $a_n=2^{n-2}/n^2$, $n>1$ **309. ա)** $\pi/4+\pi k/2$, $\pi/6+\pi k/3$ **բ)** $\pi k/5$ **գ)** $\pi/6+\pi k/3$ **դ)** $\pi k/2$, $\pm\pi/6+2\pi k/5$ **310. ա)** $-\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}0{,}75+\pi k$ **բ)** $-\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}3+\pi k$ **311. ա)** 7 **բ)** 10 **313. ա)** 73 **բ)** 14 **314. ա)** 5, 95 **բ)** 10, 100 **321.** Գոյություն ունի զրոյի ε-շրջակայք, որից դուրս կան հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ **323. ա)** 3 **բ)** 1 **324. ա)** 6 **բ)** 4 **334. ա)** 2 **բ)** 2 **335.ա)** -1 **բ)** $-1/3$

338. ա) 10 **բ)** 6 **գ)** 3 **339. ա)** 1/3 **բ)** 0 **գ)** 1 **դ)** 2 **ե)** 0,25 **զ)** −0,5 **343. ա)** 1 **բ)** 2 **գ)** 0 **դ)** 3 **ե)** 1 **զ)** 0 **346. ա)** 1 **բ)** 1 **գ)** $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ **դ)** $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ **347. ա)** $1+\ \ +2^{2-n}$, 1 **բ)** $4-3/2^{n-1}$, 4 **348. ա)** $1/e$ **բ)** e^2 **գ)** $3e$ **դ)** e^{-2} **352.** Գոյություն ունի a-ի ε-շրջակայք, որից դուրս կան հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ **354. ա)** e **բ)** e, e^{-2} **355. ա)** 1, −10/7 **բ)** 0 **356. ա)** 0,4 **բ)** 0,5 **գ)** 5 **դ)** 1,5 **357. ա)** 2 **բ)** −2,5 **գ)** −0,5 **դ)** 7 **359. ա)** 0 **բ)** 0 **գ)** 1 **դ)** 0,5 **360. ա)** 1 **բ)** 3 **գ)** $\sqrt{17}$ **361.** $\left(1+\sqrt{21}\right)/2$ **362.** 4 **363.** $\left(\sqrt{5}-1\right)/2$ **367. ա)** 7 **բ)** 1 **368. ա)** −1, 3, 4 **բ)** −2, −1, 2 **371. ա)** −2,32 **բ)** −2/19 **գ)** 0,25 **դ)** $1-\sqrt{3}$ **372. ա)** $2xh+h^2$ **բ)** $3x^2h+$ $+3xh^2+h^3$ **գ)** $-h/(x(x+h))$ **դ)** $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ **375.** $12xh+6h^2$ **380. ա)** 1,5 **բ)** 6 **381. ա)** 5 **բ)** 2 **382. ա)** $\mathbf{R}$ **բ)** $(\pi k;\pi(k+1))$, $k\in\mathbf{Z}$, միջակայքերի միավորումը **գ)** $(-1;0)\cup(0;\infty)$ **դ)** $[-3;-1]$ **383. ա)** $(0;1)\cup(1;\infty)$ **բ)** $[-1;0)\cup(0;1]$ **գ)** $(0;1)\cup(1;\infty)$ **դ)** $\left(e^{-\pi/2+\pi k};e^{\pi/2+\pi k}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, միջակայքերի միավորումը **392.** 18 **393.** 18, 20, 24 **394. ա)** 6 մ/վրկ, **բ)** 5 մ/վրկ **գ)** 4,4 մ/վրկ **395. ա)** 16 մ/վրկ **բ)** 13,75 մ/վրկ **գ)** 13,3 մ/վրկ **396. ա)** 32,75 մ/վրկ **բ)** 30,79 մ/վրկ **գ)** 28,91 մ/վրկ **397. ա)** 6 մ/վրկ, 6 մ/վրկ **բ)** 6 մ/վրկ, 6 մ/վրկ **398. ա)** 10 մ/վրկ, 10 մ/վրկ **բ)** 7 մ/վրկ, 4 մ/վրկ **399. ա)** 89 մ/վրկ, 71,75 մ/վրկ **բ)** 6 մ/վրկ, 13 մ/վրկ **400. ա)** 7, 7 **բ)** 7, 7 **401. ա)** 14, 26 **բ)** 23, 20 **402. ա)** 89, 71,75 **բ)** 6, 13 **403. ա)** 97, 96,75 **բ)** 82, 81 **404.** 4,5 ժամ, 3,6 ժամ **405.** 1 ժամ 40 րոպե **406. ա)** 0 **բ)** 0 **գ)** 0 **407. ա)** 3 **բ)** 3 **գ)** 3 **408. ա)** 15 **բ)** −18,5 **գ)** 65 **409. ա)** −4 **բ)** −1 **գ)** −1/9 **410. ա)** 1 **բ)** 0,2 **գ)** 1/7 **411. ա)** 8 **բ)** −15 **գ)** 1 **412. ա)** 3 **բ)** 48 **գ)** 27 **413. ա)** −1 **բ)** −1/9 **գ)** −0,04 **414. ա)** 0,5 **բ)** $\sqrt{2}/4$ **գ)** 0,25 **415. ա)** 5 **բ)** $2x+7$ **գ)** $3x^2-2$ **դ)** $0{,}5/\sqrt{x+3}$ **416. ա)** 4 մ/վրկ **բ)** 8 մ/վրկ **գ)** 0 մ/վրկ **417. ա)** −0,25 մ/վրկ **բ)** −1/9 մ/վրկ **գ)** −1/16 մ/վրկ **418. ա)** 0,5 **բ)** 0,25 **գ)** 1/6 **419.** $3t^2+4t$ **ա)** 10 **բ)** 16 **գ)** 22 **421. ա)** $\left(-\infty;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};\infty\right)$ **բ)** $[-3;-1]\cup[1;3]$ **422. ա)** $(\log_2 6;3]$ **բ)** $(\log_5 2;0{,}5)$ **423. ա)** $2x+5$ **բ)** $3-2x$ **գ)** $4x^3+6x-2$ **դ)** $3x^2-5x^4$ **424. ա)** $2/\sqrt{x}-3x^2$ **բ)** $-5/x^2-0{,}5/\sqrt{x}$ **գ)** $1+1/x^2$ **դ)** $2+0{,}5/\sqrt{x}+2/x^2$ **425. ա)** $3{,}5x^{2{,}5}-5x^{1{,}5}$ **բ)** $-2/x^2-2x$ **գ)** $-3/x^2+0{,}5/x^{1{,}5}$ **դ)** $3\sqrt{x}-2-0{,}5/\sqrt{x}$ **426. ա)** −4,5 **բ)** −4,3125 **427. ա)** 8,5 **բ)** 24 **428. ա)** −17,5 **բ)** −71,75 **429. ա)** 2, 3 **բ)** ±2, $\pm\sqrt{2}$ **գ)** ±1/3 **դ)** ±0,4 **430. ա)** $(-\infty;-3)\cup$ $\cup(7;\infty)$ **բ)** $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3};\infty\right)$ **գ)** $(0;2)\cup(3;\infty)$ **դ)** $(0;3)\cup(3;\infty)$ **431. ա)** t^2 **բ)** t^3+1 **գ)** $t^4/4-t^2/2+3$ **դ)** $t^4+t^3/3-15$ **432. ա)** $\sqrt{x+7{,}25}-0{,}5$, $x\in[-7;5]$ **բ)** $-\sqrt{x+7{,}25}-0{,}5$, $x\in[-7;-1]$ **433. ա)** $\log_2\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)-1$, $x\in[2;2{,}5]$ **բ)** $\log_3\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)-\log_3 2$, $x\in[2;10/3]$ **434. ա)** $1/(1-x)^2$ **բ)** $\left(2x^2+4x+4\right)/(x+1)^2$ **գ)** $(4x-6)/x^3$ **դ)** $\left(3x^2-1\right)/\left(2x\sqrt{x}\right)$ **435. ա)** $\left(2x^3+1\right)/x^2$ **բ)** $\left(6x^8-12x^5+15x^2\right)/\left(1-x^3\right)^2$ **գ)** $-\left(5\sqrt{x}+6\right)/2x^4$ **դ)** $\left(x^4-3x^2+2x\right)\div$ $\div\left(x^2-1\right)^2$ **436. ա)** −1,25 **բ)** −5 **437. ա)** −1 **բ)** 0,5 **439. ա)** $\left(\left(1-\sqrt{5}\right)/2;\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)$ **բ)** $\left(-\infty;1-\sqrt{3}\right)\cup\left(1+\sqrt{3};\infty\right)$ **գ)** $\left(-\infty;-1-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2}-1;\infty\right)$ **դ)** $\left(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)$ **440. ա)** $(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$ **բ)** $(-\infty;-1)\cup\left(-1;2-\sqrt{2}\right)\cup\left(2+\sqrt{2};\infty\right)$ **441. ա)** $a=8$, $b=2$; $a=-16/3$, $b=-8$ **բ)** $a=12$, $b=6$ **442.** $f(0)=2$, $g(0)=3$ կամ $f(0)=-14/3$, $g(0)=7$

443. ա) $(x-1)/(2-x)$, $(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;\infty)$ **բ)** $1/(\cos x-1)$, $(2\pi k;2\pi(k+1))$, $k\in\mathbf{Z}$, միջակայքերի միավորումը **գ)** $\cos(\cos x)$, $\mathbf{R}$ **դ)** $\cos(1/(x-1))$, $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ **444. ա)** $1+((x+3)^2+4)^2$, $[17;\infty)$ **բ)** $\sin^2 x+6\sin x+10$, $[5;17]$ **գ)** $\sin(\sin x)$, $[-\sin 1;\sin 1]$ **դ)** $\sin(x^2+6x+10)$, $[-1;1]$ **445.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ` **ա)** $g(x)=\sin x$, $\varphi(x)=x/3$ **բ)** $g(x)=e^x$, $\varphi(x)=4x-1$ **446.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ` **ա)** $g(x)=x^{15}$, $\varphi(x)=3x-2$ **բ)** $g(x)=x^3$, $\varphi(x)=\cos x$ **447.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ` **ա)** $g(x)=1/x$, $\varphi(x)=x^2+1$ **բ)** $g(x)=\sqrt{x}$, $\varphi(x)=x^2-7x+10$

448. $f=g\circ\varphi$, որտեղ` **ա)** $g(x)=x^2+5x$, $\varphi(x)=\sin x$ **բ)** $g(x)=\sin x$, $\varphi(x)=x^2+5x$ **449.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ` **ա)** $g(x)=e^x$, $\varphi(x)=\sin x$ **բ)** $g(x)=\sin x$, $\varphi(x)=e^x$ **450.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ` **ա)** $g(x)=\log_3 x$, $\varphi(x)=x-5x^3$ **բ)** $g(x)=1/\sqrt{x}$, $\varphi(x)=3x^7-4x^2$ **451.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ` **ա)** $g(x)=\log_2 x$, $\varphi(x)=x^2-3x$ **բ)** $g(x)=x^2-3x$, $\varphi(x)=\log_2 x$ **452.** $f=g\circ\varphi$, որտեղ` **ա)** $g(x)=\sqrt{x}$, $\varphi(x)=\cos x$ **բ)** $g(x)=\cos x$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$ **453. ա)** $3x^2+14x^{2,5}$ **բ)** $1{,}25x^{0,25}+x^{-4/3}$ **գ)** $\pi x^{\pi-1}+\pi$ **դ)** $-4x^{-5/3}-0{,}1x^{-0,9}$ **454. ա)** $4x^{-2/3}-0{,}5x^{-0,5}$ **բ)** $0{,}5x^{-0,5}-x^{-2/3}$ **գ)** $-0{,}5x^{-1,5}+1/3\,x^{-4/3}$ **դ)** $-1{,}2x^{-1,2}-5/6\,x^{-7/6}$ **455. ա)** $48(4x-2)^{11}$ **բ)** $-30(3-2x)^{14}$ **գ)** $9(2-x)^{-10}$ **դ)** $-12(x+1)^{-13}$ **ե)** $-200(5x-1)^{-11}$ **զ)** $36(1-2x)^{-19}$ **456. ա)** $0{,}5(3x^4-x)^{-05}\times(12x^3-1)$ **բ)** $0{,}5(3x-x^5)^{-0,5}\cdot(3-5x^4)$ **գ)** $-0{,}5(4x^2-3x)^{-1,5}\cdot(8x-3)$ **դ)** $-3x^2(2x^3+4)^{-1,5}$ **457. ա)** -17 **բ)** 0 **458. ա)** 0 **բ)** $3\sqrt{3}/4$ **459. ա)** $(-3;\infty)$ **բ)** $\left(-\infty;(\sqrt{33}-1)/8\right]$ **460.** -3 **461. ա)** 3 **բ)** 2 **462.** 4 **463.** 4 կմ/ժ, 6 կմ/ժ **464.** 40 կմ/ժ, 60 կմ/ժ **465. ա)** $1{,}5x^{0,5}+2$ **բ)** $-x^{1,5}$ **գ)** $\dfrac{3x^2-4x\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$ **դ)** $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ **466. ա)** $\cos x+e^x$ **բ)** $-\sin x+\dfrac{1}{x\ln 7}$ **գ)** $5^x\ln 5+\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **դ)** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ **ե)** $4{,}1\cdot x^{3,1}-\sin x$ **զ)** $-\sin x-e^x$ **467. ա)** $4\cos 4x$ **բ)** $-\pi\sin\pi x$ **գ)** $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **դ)** $-\dfrac{5}{\sin^2 x}$ **468. ա)** $10\cos\left(5x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ **բ)** $2\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-2x\right)$ **գ)** $\dfrac{12}{\cos^2(3x-1)}$ **դ)** $-\dfrac{30}{\sin^2(4-5x)}$ **469. ա)** $2e^{2x}+1$ **բ)** $-2^{-x}\ln 2$ **գ)** $\dfrac{3}{3x+1}$ **դ)** $\dfrac{1}{(x-2)\ln 5}-1$ **470. ա)** $\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x}{4}+\ln x+1$ **բ)** $\dfrac{2}{\cos^2 2x}+5e^{5x}$ **գ)** $-2\sin(2x+3)-\dfrac{1}{x\ln 3}$ **դ)** $\dfrac{1}{\sin^2(5-x)}-4^{-x}\ln 4$ **471. ա)** $\ln x$ **բ)** $\dfrac{1}{(x+1)\ln 2}$ **գ)** $\dfrac{3^x}{x}+3^x\cdot\ln 3\cdot\ln x$ **դ)** $\dfrac{e^x}{e^x+1}$ **472. ա)** -10 **բ)** 24 **գ)** 35 **դ)** 2 **ե)** 1 **473. ա)** 2 **բ)** $-2\sqrt{2}$ **474. ա)** -1 **բ)** 1 **գ)** 2000 **476.** πk, $k\in\mathbf{Z}$ **477.** $\pm 5\pi/24+\pi k/2$, $k\in\mathbf{Z}$ **478. ա)** e, e^{-2} **բ)** ± 1 **479. ա)** $(1;6)$ **բ)** $(-\sqrt{2};0)\cup(0;\sqrt{2})$ **480.** $1{,}5$ **482. ա)** $\pi/6$ **բ)** $3\pi/4$ **գ)** $\pi/4$ **դ)** 0 **ե)** $\operatorname{arctg}(1{,}5)$ **զ)** $\pi/4$ **483. ա)** -4, 2 **բ)** πk **գ)** $\pm\pi/12+\pi k$ **դ)** $\pi k/2$ **484. ա)** 1) x_4 2) x_2, x_4 3) x_5 4) x_3 5) x_1 **բ)** 1) x_3 2) x_3, x_4 3) x_1 4) x_5 5) x_2 **485. ա)** $y=4-2x$ **բ)** $y=3x+1$ **գ)** $y=2-x$ **դ)** $y=3x+2$ **ե)** $y=0$ **զ)** $y=2$ **486. ա)** $y=4x+\sqrt{3}-4\pi/3$ **բ)** $y=4$ **գ)** $y=$

$=-4x+\pi+4$ **դ)** $y=-4x+1+\pi/2$ **487. ա)** $y=3ex-2e$ **բ)** $y=-ex$ **գ)** $y=2x/3+\ln 3-1$ **դ)** $y=2x/e$ **488. ա)** 0 **բ)** 0 **գ)** $\pi k/2$ **դ)** $-0{,}5$ **489. ա)** $(0;2)$, $(2;0)$ **բ)** $((\pi-4)/8;0)$, $\left(0;\sqrt{2}(4-\pi)/8\right)$ **գ)** $(0;3)$, $(-1;0)$ **դ)** $(0;1-\log_7 e)$, $(7-7\ln 7;0)$ **ե)** $(0;1)$ **զ)** $(0;2)$ **490. ա)** 9 **բ)** 49 **գ)** 2 **դ)** 0,5 **491. ա)** $-1{,}5$ **բ)** 8 **492. ա)** $\downarrow$ $(-\infty;1]$-ում, $\uparrow$ $[1;\infty)$-ում **բ)** $\uparrow$ $(-\infty;-4]$-ում, $\downarrow$ $[4;\infty)$-ում **գ)** $\uparrow$ $(-\infty;-0{,}5]$-ում, $\downarrow$ $[-0{,}5;\infty)$-ում **դ)** $\downarrow$ $(-\infty;0]$-ում, $\uparrow$ $[0;\infty)$-ում **493. ա)** $\uparrow$ **բ)** $\downarrow$ **գ)** $\downarrow$ **դ)** $\uparrow$ **494. ա)** 0,75 **բ)** 1,5 **գ)** 0, 1 **դ)** 0, 3 **ե)** ±1, 0 **զ)** $-1/3$, 3 **495. ա)** $\pi/2+\pi k$ **բ)** πk **գ)** πk **դ)** $\pi k/2$ **ե)** 0 **զ)** 0 **496. ա)** 5 **բ)** 3 **գ)** -1, 3 **դ)** 2, 4 **497. ա)** $\downarrow$ $(-\infty;\infty)$-ում **բ)** $\uparrow$ $(-\infty;\infty)$-ում **գ)** $\downarrow$ $(-\infty;4]$-ում, $\uparrow$ $[4;\infty)$-ում **դ)** $\uparrow$ $(-\infty;3]$-ում, $\downarrow$ $[4;\infty)$-ում **498. ա)** $\uparrow$ $(-\infty;-1]$-ում և $[1;\infty)$-ում, $\downarrow$ $[-1;0)$-ում և $(0;1]$-ում **բ)** $\uparrow$ $(-\infty;-0{,}5]$-ում և $[0{,}5;\infty)$-ում, $\downarrow$ $[-0{,}5;0)$-ում և $(0;0{,}5]$-ում **գ)** $\uparrow$ $(-\infty;-4)$-ում և $(-4;\infty)$-ում **դ)** $\downarrow$ $(-\infty;-3{,}5)$-ում և $(-3{,}5;\infty)$-ում **499. ա)** $\uparrow$ $(-\infty;-3]$-ում և $[1;\infty)$-ում, $\downarrow$ $[-3;1]$-ում **բ)** $\downarrow$ $(-\infty;-1]$-ում և $[3;\infty)$-ում, $\uparrow$ $[-1;3]$-ում **գ)** $\uparrow$ $(-\infty;2]$-ում, $\downarrow$ $[2;\infty)$-ում **դ)** $\downarrow$ $(-\infty;-3]$-ում և $[0;3]$-ում, $\uparrow$ $[-3;0]$-ում և $[3;\infty)$-ում **500. ա)** $\uparrow$ $\left(-\infty;11-\sqrt{145}\right]$-ում և $\downarrow$ $\left[11+\sqrt{145};\infty\right)$-ում, $\left[11-\sqrt{145};11+\sqrt{145}\right]$-ում **բ)** $\uparrow$ $(-\infty;-5]$-ում և $[3;\infty)$-ում, $\downarrow$ $[-5;3]$-ում **գ)** $\uparrow$ $\left(-\infty;3-\sqrt{17}\right]$-ում և $\left[3+\sqrt{17};\infty\right)$-ում, $\downarrow$ $\left[3-\sqrt{17};3+\sqrt{17}\right]$-ում **դ)** $\uparrow$ $\left(-\infty;\left(1-\sqrt{13}\right)/2\right]$-ում և $\left[\left(1+\sqrt{13}\right)/2;\infty\right)$-ում, $\downarrow$ $\left[\left(1-\sqrt{13}\right)/2;\left(1+\sqrt{13}\right)/2\right]$-ում **501. ա)** $(-\infty;-1]$-ում նվազում է, $\uparrow$ $[-1;\infty)$-ում **բ)** $\downarrow$ $(-\infty;-2]$-ում, $\uparrow$ $[-2;\infty)$-ում **գ)** $\uparrow$ $(-\infty;0]$-ում, $\downarrow$ $[0;\infty)$-ում **դ)** $\uparrow$ $(-\infty;-1]$-ում, $\downarrow$ $[-1;\infty)$-ում **507. ա)** $\uparrow$ $(-\infty;-d/c)$ և $(-d/c;\infty)$ միջակայքերում, եթե $ad-bc>0$ և $\downarrow$, եթե $ad-bc<0$ **514. ա)** 9 **բ)** 12 **515. ա)** $(-\infty;-3]\cup[1;\infty)$ **բ)** $\varnothing$ **գ)** $(-3;1)$ **516. ա)** $x_{\max}=2$ **բ)** $x_{\min}=1{,}5$ **գ)** $x_{\max}=-1$ **դ)** $x_{\max}=2$ **517. ա)** $x_{\max}=2\pi/3+2\pi k$, $x_{\min}=-\pi/3+2\pi k$ **բ)** $x_{\max}=2\pi/3+2\pi k$, $x_{\min}=-\pi/3+2\pi k$ **գ)** $x_{\max}=\pi/2+\pi k$, $x_{\min}=\pi k$ **դ)** $x_{\max}=4\pi k$, $x_{\min}=2\pi+4\pi k$ **518.ա)** 0 **բ)** 0, 0,25 **գ)** πk, $\pm\pi/3+2\pi k$ **դ)** $(-1)^{k+1}\pi/6+\pi k$ **519.ա)** $x_{\min}=1$ **բ)** $x_{\max}=-4$ **գ)** $x_{\max}=-3$, $x_{\min}=1$ **դ)** $x_{\min}=-1$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=3$ **520. ա)** $x_{\max}=-1$, $x_{\min}=1$ **բ)** $x_{\max}=-\sqrt{2}$, $x_{\min}=\sqrt{2}$ **գ)** $x_{\min}=-6$, $x_{\max}=4$ **դ)** $x_{\max}=-3$, $x_{\min}=1$ **521.ա)** -5, 1, $y_{\min}=-0{,}3$, $y_{\max}=1{,}5$ **բ)** -2, 6, $y_{\min}=-0{,}5$, $y_{\max}=1/6$ **գ)** 0, $y_{\max}=3/17$ **դ)** 0, $y_{\min}=-1/3$ **522. ա)** -3 **բ)** 2,5 **523. ա)** 0, 1, 2 **բ)** 0, 2, 4 **524. ա)** -1, 1/6 **բ)** 0, 1, 2 **527. ա)** $a=-3$, $b=-24$ **բ)** $a=12$, $b=8$ **528. ա)** $a\ge 0$ **բ)** $a=0$ **գ)** -4 **529.** 2 **530.** $-4{,}5$ **531.** $a=1$, $b=-6$, $c=9$, $d=2$ **532.** $a=2$, $b=0$, $c=-6$, $d=2$ **533. ա)** 2, -1 **բ)** 2, -12 **534.ա)** 1/3, -5 **բ)** 5/3, 3/5 **535.ա)** 5, 4 **բ)** -2, $-4{,}25$ **գ)** 5, 4 **դ)** 9, 2 **536.ա)** -1, -9 **բ)** 14, 4 **գ)** 110, 2 **դ)** 0, -375 **537. ա)** 5, 4 **բ)** 0, $-0{,}5$ **գ)** 0, $-0{,}25$ **դ)** 32, 12 **538. ա)** 1, -3 **բ)** 5, 2 **գ)** 0, -2 **դ)** 2, -1 **539. ա)** 4^{12}, 37 **բ)** 3^{14}, 29 **540. ա)** -1, $-1{,}5$ **բ)** -2, -6 **541. ա)** $e^{\pi/2}$, $-e^{\pi}$ **բ)** $\left(3\pi\sqrt{2}+8\sqrt{2}\right)/4$, -1 **գ)** π, $2(\sin 1+\cos 1)$ **542. ա)** ±32 **բ)** ±9 **543.** 9 **544.** $e/(e-1)$ **545.** $\sqrt{153}$ **546.** $14=7+7$ **547.** $20=10+10$ **548. ա)** $\sqrt{S}$, $\sqrt{S}$ **բ)** $\sqrt{S}$, $\sqrt{S}$ **549. ա)** $\sqrt{2}R$, $\sqrt{2}R$ **բ)** $\sqrt{2}R$, $\sqrt{2}R$ **550.** $2p/3$ **551.** 45° **552.** 45° **553.** R **554.** $2R$ **555.** $c/2$, $b/2$ **556.** 12 **557.** $2S$ **558.** $a\left(\sqrt{5}-1\right)$ **559.** $\sqrt{2}R$ **560.** $\sqrt[3]{V/2\pi}$ **561.** զույգ են դ)-ն և ե)-ն, կենտ՝ ա)-ն և բ)-ն **562. ա)** π **բ)** π **գ)** π **571.** 5 կմ/ժ **572.** 450 կմ

573.ա) $24x+2/x^3$ **բ)** $2+1/x^2$ **գ)** $-4\sin 2x+\cos(x/2)/4$ **դ)** $-1/x^2-4e^{2x}$ **ե)** $2\cos x-x\sin x$ **զ)** $-2e^x\sin x$
574.ա) -25 **բ)** 12 **գ)** $3e\ln 2$ **դ)** 0
575.ա) 2 **բ)** -4 **գ)** $12t^2-10$ **դ)** $20t^3-24t$ **ե)** $-4\sin t$ **զ)** $-9\cos 3t$ **է)** e^t+e^{-t} **ը)** e^t-e^{-t}
576. ա) 1 **բ)** $2{,}5e^{-0{,}5}$ **գ)** -1 **դ)** e
577. ա) 61, 7 **բ)** 27, 9
578. ա) 1 մ/վրկ², 2 մ/վրկ² **բ)** 97/6 մ, 32/3 մ
579. ա) 36 մ/վրկ, 33 մ/վրկ **բ)** 17 մ և 11 մ (երբ $t=1$), 91 մ և 81 մ (երբ $t=3$)
580. ա) $x_{\min}=1$, $f_{\min}=0$ **բ)** $x_{\min}=\ln 2/3$, $f_{\min}=1{,}5\cdot\sqrt[3]{2}$ **գ)** $x_{\min}=0{,}5$, $f_{\min}=-0{,}125$, $x_{\max}=1$, $f_{\max}=0$, $x_{\min}=1{,}5$, $f_{\min}=-0{,}125$ **դ)** $x_{\max}=-2$, $f_{\max}=2$, $x_{\min}=0$, $f_{\min}=-2$
581. ա) $x_{\max}=e$, $f_{\max}=3e$, $x_{\min}=e^2$, $f_{\min}=e^2$ **բ)** $x_{\max}=e^{-1}$, $f_{\max}=6/e$, $x_{\min}=e^3$, $f_{\min}=-2e^3$ **գ)** $x_{\min}=-1$, $f_{\min}=4/e$, $x_{\max}=0$, $f_{\max}=2$, $x_{\min}=1$, $f_{\min}=4/e$
584. ա) -2 **բ)** 2 **գ)** -5 **դ)** -1
585. ա) 3 **բ)** 2
586. ա) -1 **բ)** 0
587. ա) 4 **բ)** $0{,}5$
588. ա) -1, 2 **բ)** 4
589. ա) 2 **բ)** -1
590. ա) 0 **բ)** -1
591. ա) $\log_2 3-1$ **բ)** $\pm 0{,}5$
592. ա) ± 1, 4 **բ)** -1
593. ա) երկու լուծում, երբ $a\in(-1;0)\cup(7;9)$, մեկ լուծում՝ $a\in[0;7]\cup\{-1;9\}$, լուծում չունի՝ $a\in(-\infty;-1)\cup(9;\infty)$ **բ)** երկու լուծում, երբ $a\in(-\infty;-3{,}5)\cup(0;1)\cup(9;\infty)$, մեկ լուծում՝ $a\in[-3{,}5;0]\cup\{1;9\}$, լուծում չունի՝ $a\in(1;9)$
594. ա) $(-1;3)$ **բ)** $(-\infty;-1)\cup(5;\infty)$
595. ա) $(-\infty;-3]\cup[2;\infty)$ **բ)** $(-5;\infty)$
596. ա) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ **բ)** $(-\infty;1]$
597. ա) $[2;\infty)$ **բ)** $(-\infty;\log_2 3)$
598. ա) $(-1;1)$ **բ)** $[-2;2-\log_2 3]$
599.ա) $(-\infty;-1)$ **բ)** $[0;3]$
600.ա) 7,125 **բ)** 12,5 **գ)** 20,8 **դ)** 99,25
601.ա) 32 **բ)** 10
602.ա) 35 **բ)** 0,5
603. ա) $-1/3$ **բ)** 14
604. ա) 2 **բ)** 3
605. ա) 0,04, $\sqrt{5}$ **բ)** 100, 0,1
606. ա) 10, 0,001 **բ)** 0,01, 0,001
607. ա) 2, 1024 **բ)** 1/27, 9
608. ա) 3 **բ)** 5
609. ա) 2, 4 **բ)** 2
610.ա) 10, 0,01 **բ)** 8
611.ա) 0,25, 4 **բ)** 5, 0,2
612.ա) -1, -64 **բ)** -1000
613.ա) $(\sqrt{5}\pm 1)/2$ **բ)** 0,5, 4,5
614. ա) $(2;6)$ **բ)** $(10;100)$, $(100;10)$
615. ա) $(5;25)$, $(25;5)$ **բ)** $(10000;0)$
616. ա) $(2{,}5;3]$ **բ)** $[-1;2)$
617. ա) $(0;5^{-4})$ **բ)** $(0;625)$
618. ա) $(-1;1)\cup(3;5)$ **բ)** $(-\infty;-7)\cup(-1;1)\cup(3;\infty)$
619. ա) $[0{,}01;10000]$ **բ)** $(4;64)$
620. ա) $(0;0{,}5]\cup[4;\infty)$ **բ)** $(1/3;3/8)\cup(5/3;\infty)$
621. ա) $(0;1/9)\cup[9;\infty)$ **բ)** $(-2;\sqrt[3]{2}-3]$
622. ա) $(-1;(1-\sqrt{5})/2)\cup((1+\sqrt{5})/2;2)$ **բ)** $(-3;-2)\cup(1;2)$
623. ա) $((\sqrt{5}-3)/2;\infty)$ **բ)** $(0;4]$
624. ա) 2,5, 3,5, 4,5 **բ)** 9, 12, 15
625. $[0;\log_2\log_5 9]$ **ա)** այո **բ)** ոչ
626. $[\log_5\log_5 3;0]$ **ա)** ոչ **բ)** այո
635. ա) $3x^2-105x^{14}$ **բ)** $23x^{22}-161x^6+11$
636.ա) $(x^2+6x+1)/(x+3)^2$ **բ)** $2x+1/x^2$
637.ա) $3\cos 3x$ **բ)** $2/\cos^2 2x$
638.ա) $7x^6+1/x$ **բ)** $-\sin x-\log_2 e/x$
639.ա) x^2e^x **բ)** $2^x\ln 2+4^{-x}\ln 4$
640. ա) 1,25 **բ)** $-0{,}25$
641. ա) -3 **բ)** 0,5
642. ա) 6 **բ)** 15
643. ա) -4 **բ)** 4
644. ա) 10 **բ)** $-4\ln 2-27\ln 3$
645.ա) 1 **բ)** 0,8
646. 1, 9
647. 4
648.ա) 30° **բ)** 45°
649.ա) -4, 2 **բ)** 0
650.ա) $y=3-x$ **բ)** $y=3x+3$
651. ա) $y=3-2x$ **բ)** $y=2+x/4$
652. ա) $y=3e(x+1)$ **բ)** $y=0{,}375x-0{,}75\ln 2+1{,}25$
653.ա) $y=-\sqrt{2}x/2+(\pi+4)\sqrt{2}/8$ **բ)** $y=x/2$
654.ա) 4,5 **բ)** 2
655. $(e/6)^6$
656. ա) $f\uparrow(-\infty;0]$ և $[2;\infty)$, $f\downarrow[0;2]$ **բ)** $f\uparrow(-\infty;-5]$ և $[1;\infty)$, $f\downarrow[-5;1]$
657. ա) $f\downarrow(-\infty;2)$ և $(2;\infty)$ **բ)** $f\uparrow(-\infty;-1]$ և $[1;\infty)$, $f\downarrow[-1;1]$
658. ա) $f\downarrow(-\infty;\log_{27}2]$, $f\uparrow[\log_{27}2;\infty)$ **բ)** $f\uparrow(-\infty;0)$ և $(0;\infty)$
659. ա) $x_{\max}=-1$, $x_{\min}=3$ **բ)** $x_{\max}=2$, $x_{\min}=4$
660. ա) $x_{\max}=-1$ **բ)** $x_{\min}=1$
661. ա) $x_{\max}=1$, $x_{\min}=-1$ **բ)** $x_{\max}=-2$, $x_{\min}=4$
662. ա) $x_{\min}=1$ **բ)** $x_{\min}=0$
663. ա) 7, -13 **բ)** 35, $-5{,}5$
664. ա) 45, -4 **բ)** 51, $-5{,}25$

665. ա) $2{,}125$, 1 **բ)** 2, $1{,}5$ **666.ա)** 4, $\sqrt{7}$ **բ)** 5, 4 **667. ա)** $1+\pi/2$, 0 **բ)** 0, $-3\sqrt{3}/2$
668. $26=13+13$ **669.** $18=9+9$ **670.** $64=32+32$ **671.** 2 **672.** $2\sqrt{3}/3$, $\sqrt{3}/3$ **673.** $4\sqrt{3}$
674. $4\sqrt{3}\pi R^3/27$ **675.** $2\sqrt{2}R/3$ **676.** $\sqrt{43-14\sqrt{7}}/2$ **677.** $12\sqrt{3}$ **678.** $12\sqrt{3}$ **679.** $2\sqrt{S}/\sqrt[4]{3}$